Makkos Anikó – Fehér Ágota – Pongrácz Attila (2020, szerk.):
Okos lét, innováció és digitalizáció – irányok, trendek és következmények.
A XXIII.Apáczai-napok Tudományos Konferencia tanulmánykötete.
Széchenyi István Egyetem Apáczai Csere János Kar, Győr

A kerület és a terület fogalmának megértése – gondolatok két geometria feladat kapcsán

Bagota Mónika – Szitányi Judit
Eötvös Loránd Tudományegyetem Tanító- és Óvóképző Kar, Budapest

1. Bevezetés

Az ELTE TÓK Matematika Tanszéke a 2016/17-es tanévben bevezetett egy új, Matematikai praktikum nevű tárgyat az első évfolyamos tanító szakos hallgatók számára. Az indokolta a tárgy megszületését, hogy Tanszékünk oktatói hosszú ideje úgy tapasztalják, hogy szükség van a hallgatók olyan jellegű matematikai tudásszintjének felmérésére, amely azt mutatja meg, hogy hallgatóink rendelkeznek-e azokkal a matematikai ismeretekkel, amelyekre majd a későbbiekben, a képzés során építeni kívánunk. Az az álláspontunk, hogy a Matematikai praktikum kurzusra csak azoknak a hallgatóknak kelljen járniuk, akiknek valóban szükségük van matematikai ismereteik felfrissítésére és a hiányosságok pótlására, így ettől a tanévtől kezdődően minden tanévben, még a tanév kezdete előtt mindenkivel megíratunk egy dolgozatot, és ennek alapján határozzuk meg a kurzuson részt vevő hallgatók csoportjait. A 2016/17-es tanév első évfolyamos hallgatóinak eredményeiről részletes beszámoló született (Dancs–Kulman–Pintér 2017), továbbá a 2016/17-es tanév első és harmadéves hallgatóinak eredményeit is összehasonlítottuk (Bagota–Szitányi 2018).

A dolgozat minden tanévben 20 tesztfeladatból és 4 kifejtendő feladatból áll. Mindegyik tesztfeladatnál négy lehetséges megoldást adunk meg, amelyből csak egy helyes, továbbá minden tesztfeladat 1 pontot ér, így ezekből a feladatokból összesen 20 pontot lehet elérni. A 4 kifejtendő feladat mindegyikénél a válaszok részletes magyarázatát várjuk, s ezen feladatok mindegyike egységesen 5 pontot ér. A szintfelmérő dolgozat megírására 70 perc áll a hallgatók rendelkezésére. A szintfelmérő dolgozatot a 2019/20-as tanévben az 1. évfolyamon 190 hallgató írta meg.

Ebben a munkában a 2019/20-as tanév szintfelmérő dolgozatában szereplő két kifejtendő feladat megoldási stratégiáit mutatjuk be.

2. Módszer

Feladataink alapvetően az alsó tagozatos tananyag tudására vagy esetleges hiányosságaira kérdeznek rá, a dolgozat összeállításánál tudatosan ügyelünk arra, hogy mind az egyszerűbb tesztfeladatok jelentős része, mind pedig a kissé bonyolultabb kifejtős feladatok szöveges feladatok legyenek. Döntésünket az indokolta, hogy tapasztalataink alapján a szöveges feladatokhoz tartozó különféle megoldási stratégiák alkalmazhatósága nem tudatos a hallgatók számára (Csíkos–Szitányi–Kelemen 2012). „A szöveges feladatokkal való munkának az alsó tagozaton alapvetően két fő funkciója van. Az egyik szerepe a műveletek értelmezésében található. A másik szerepét a problémamegoldó gondolkodás fejlesztésében, a matematizálás, modellalkotás területén végzett munkában tölti be.” (C. Neményi–R. Szendrei 2010: 213) A feladatok választásánál figyelmet fordítunk arra is, hogy a kiválasztott feladatok között szerepeljen olyan feladat, amelynek

- modellje számfeladat vagy nyitott mondat;
- megoldása egy vagy esetleg több szám, számpár vagy adat;
- esetében egy vagy több lépésben kereshető a válasz;

- megfogalmazása egyenes szövegezésű, és olyan feladat is, amely fordított szövegezésű (C. Neményi–R. Szendrei 2010: 239).

A tesztfeladatokat úgy válogatjuk össze, hogy a kiválasztott feladatok mindegyike az alábbi négy típus valamelyikébe tartozzon:

- szövegértés;
- számfogalom, műveletek;
- mérés – mértékváltás;
- összefüggés-felismerés.

A tesztben mind a négy kategória 5 feladatot tartalmaz, ezzel az alsó tagozaton hangsúlyos fejlesztést kívánjuk reprezentálni.

2.1. A kerületről és a területről

A dolgozatból az általunk kiválasztott két kifejtős feladat mindegyike geometria feladat, az egyik feladat a téglalap kerületével, a másik feladat pedig a téglalap területével kapcsolatos ismeretekre kérdez rá. A dolgozatban tudatosan helyeztünk el olyan geometria feladatokat, amelyek esetében nemcsak a végeredményre, hanem a megoldás menetére is kíváncsiak voltunk. Hosszú évek tapasztalata ugyanis az, hogy a geometria feladatok megoldása az egyik olyan része a matematikai feladatmegoldásnak, amely a hallgatók számára problémát szokott okozni, s ezen belül különösen sok gondot okoznak a kerület és még inkább a területszámítással kapcsolatos feladatok.

A feladatok bemutatása előtt emeljünk ki néhány nagyon fontos gondolatot C. Neményi Esztertől a kerület és a terület fogalmáról, méréséről:

„Külön hangsúlyozzuk, hogy a kerület nem önálló mennyiség, hanem hosszúság: a síkidomot határoló vonal hossza. Ez a hosszúság éppúgy mérhető, mint bármely más hosszméret. Legfeljebb néha célszerűbb külön mérni az oldalakat, s az így nyert mérőszámokat összeadni, máskor, ha vannak egyenlő oldalak, az összeadás is tovább egyszerűsíthető, helyettesíthető szorzással. „Képletet” nemcsak ezért nem tanulunk pl. a téglalap vagy a négyzet kerületének „számítására”, mert az adott életkorban ez nem felelne meg a tanulás helyes módjának. Azért sem, mert az elfedhetné a lényeget: a kerületfogalmat.” (C. Neményi 2007: 141)

„Sok zavart szokott okozni az, ha a tanító egy régen megtanult ismeretet alapos újragondolás nélkül, tisztázatlanul próbál átadni. A területfogalom kialakulásának is hátráltatója lehet, ha a téglalap területmérését korán fel akarjuk váltani a területszámítással. Egy olyan téglalap területét, amelynek egyik oldala 8 m, másik oldala 6 m, nem számolhatjuk ki úgy, hogy 8 m · 6 m, hanem csak úgy, hogy 8 m^2 · 6. Értelme sincs annak, hogy valamit „6 méterszer” vettünk! És nem lesz két hosszméret szorzata új mennyiség! A területet csak a területegység valahányszorosaként lehet mérni, értelmezni! Tehát amikor a téglalap területének meghatározásánál az egyszerűsítő eljárást kezdjük kidolgozni, mindig a tényleges kirakásból induljunk: állapítsák meg a gyerekek, hogy hány egység fér egy sorba (s ez ne hosszúságmérés legyen, hanem a sáv területének megmérése!), s aztán – esetleg már nem is egységekre tagolva – csíkokkal mérjék ki az egész téglalapot (állapítsák meg, hogy hány csík fér rá a lapra). Később a csíkokat képviselheti, jelezheti egy-egy (vagy néhány) egység a sorok elején! Legyen külön felismerni való tény, hogy ha pl. az 1 cm oldalú négyzet területét választottuk egységnek, akkor éppen annyi kis négyzet fér egy sorba, ahány centiméter a téglalap szélessége, s annyi sor fér a téglalapra, ahány centiméter a hosszúsága.” (C. Neményi 2007: 147)

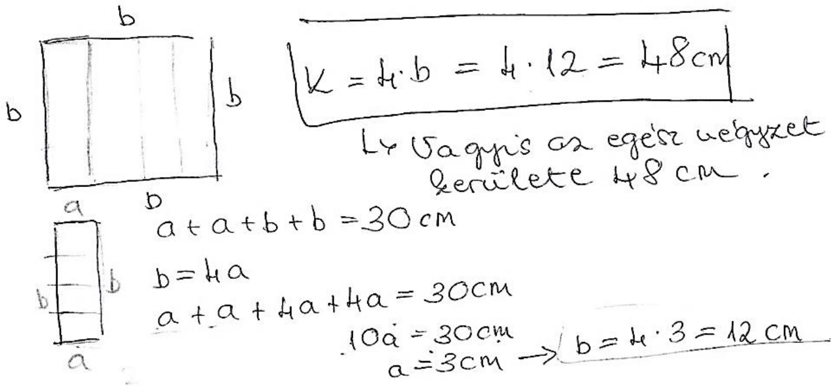
Hisszük és valljuk, hogy a hallgatóink megoldásaiban talált hibák igen nagy része kiküszöbölhető lett volna a fenti idézetekben található gondolatok ismeretében és a tanácsok megfogadásával.

2.2. A kerületszámítással kapcsolatos feladat

Egy négyzetet az egyik oldalával párhuzamos szakaszokkal feldaraboltunk négy egybevágó, keskeny téglalapra. Egy-egy ilyen téglalap kerülete 30 cm. Mekkora az egész négyzet kerülete?

2.2.1. A feladat helyes megoldása

Az 1.sz. ábrán a feladat helyes megoldását láthatjuk. Nagyon szépen látható, hogy a hallgató pontosan tisztában volt azzal a ténnyel, hogy a síkidomot határoló vonal hosszát kell kiszámítania, s bár felírta a képletet, de az ábrából világosan kitűnik, hogy gondolatban „végigsétált" a 30 cm kerületű keskeny téglalapon.

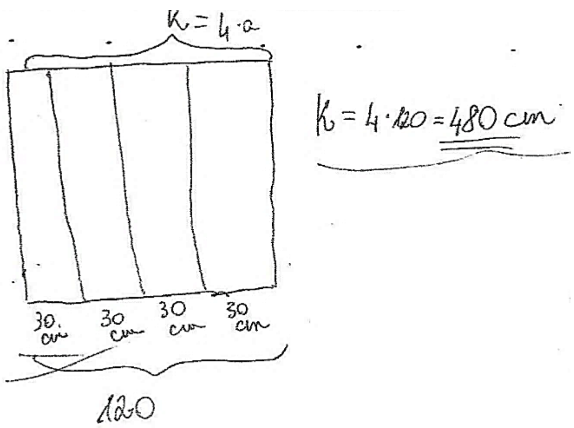


1. sz. ábra

2.2.2. A feladat néhány hibás megoldása

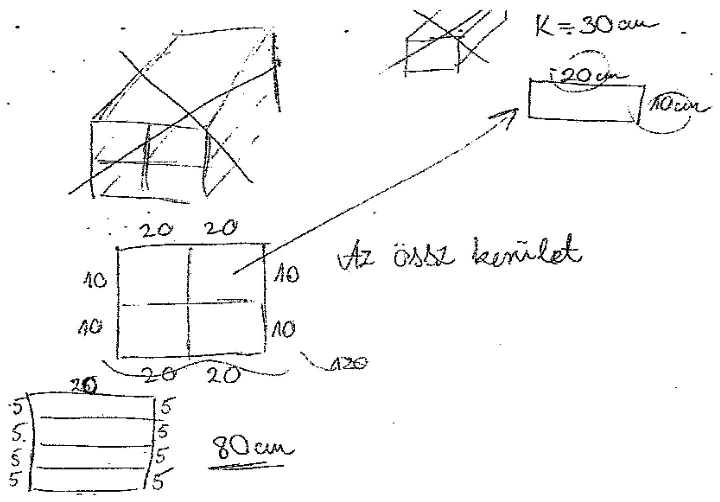
Vizsgáljuk meg az alábbiakban a feladat néhány tipikusan előforduló hibás megoldását!

A 2. sz. ábrán látható, hogy a hallgató ismeri azt a képletet, amellyel a négyzet kerületét kiszámíthatjuk, ugyanakkor a feladatban szereplő második mondat szövegét valószínűleg nem olvasta el figyelmesen. Ebből adódhat az, hogy a keskeny téglalapok kerületével nem is foglalkozott a feladat megoldása során, értelmezése szerint a 30 cm nem a keskeny téglalap kerülete, csupán a téglalap rövidebb oldalának hossza.



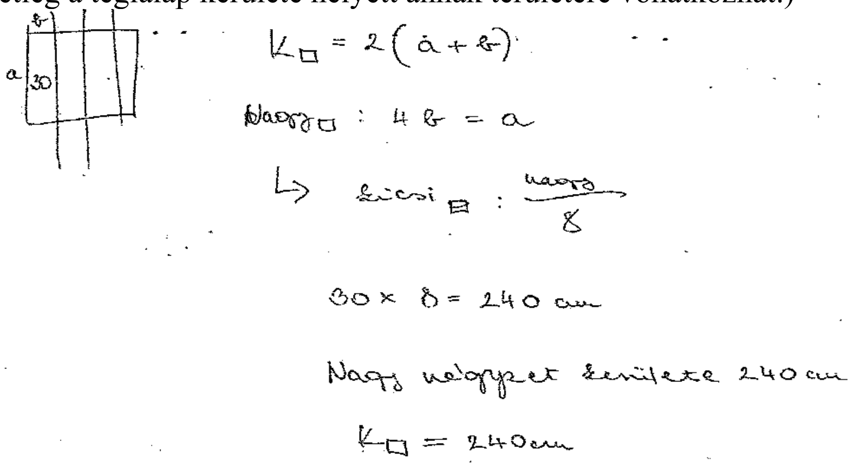
2. sz. ábra

A 3. sz. ábrán látható, hogy ebben az esetben a hallgató megpróbálja megalkotni a feladatban megfogalmazott négy keskeny téglalapot, és ez az alsó rajzon már sikerül is neki. Ő már próbál arra is figyelni, hogy mindegyik keskeny téglalap kerülete 30 cm legyen, azonban nem veszi figyelembe a téglalap 4. oldalát (azaz nem helyesen számolja ki a síkidomot határoló vonal hosszát), ebből adódik a feladat hibás megoldása.



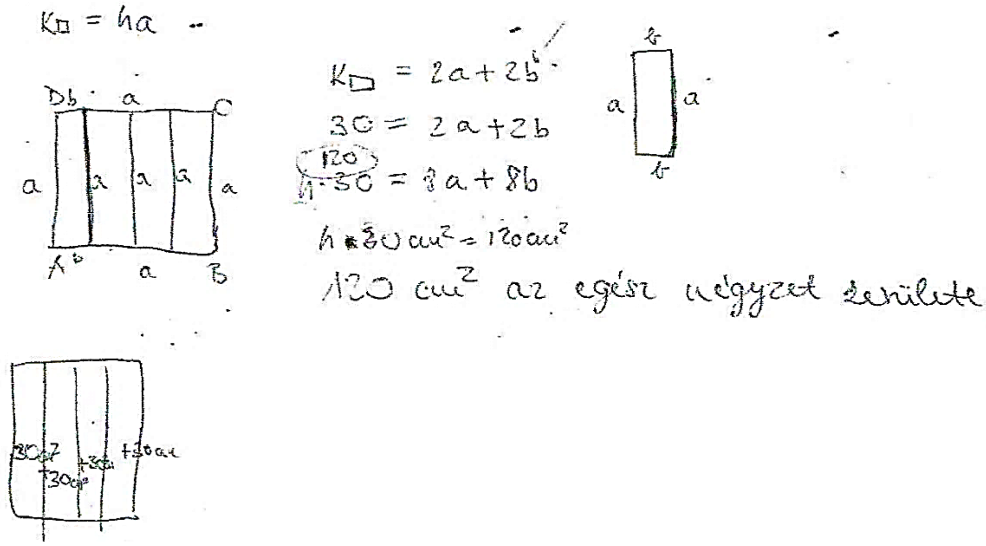
3. sz. ábra

A 4. sz. ábrán látható, hogy a hallgató ismeri a téglalap kerületének kiszámítási képletét, valamint a második formulából az is látszik, hogy a feladat első mondatát helyesen értelmezi. Innentől kezdődően azonban az látható, hogy ismét bebizonyosodik az a tapasztalatunk, hogy a szöveges feladatokhoz tartozó különféle megoldási stratégiák alkalmazhatósága nem tudatos a hallgatók számára (Csíkos–Szitányi–Kelemen 2012). Hiszen a harmadik sorban már az olvasható, hogy mivel a feladat során az első sorban 2-vel, a másodikban pedig 4-gyel szoroztunk, így ebből már az „következik", hogy akkor most 8-cal osztanunk kell. További érdekessége a feladat megoldásának, hogy bár az elkészült ábra helyes, azt a hallgató mégsem használja fel semmilyen módon a feladat megoldása során, azaz a konkrét látványra nem, csupán a képletekre hagyatkozik. (Felmerülhet bennünk még az is, hogy az ábrában szereplő 30-as szám esetleg a téglalap kerülete helyett annak területére vonatkozhat.)



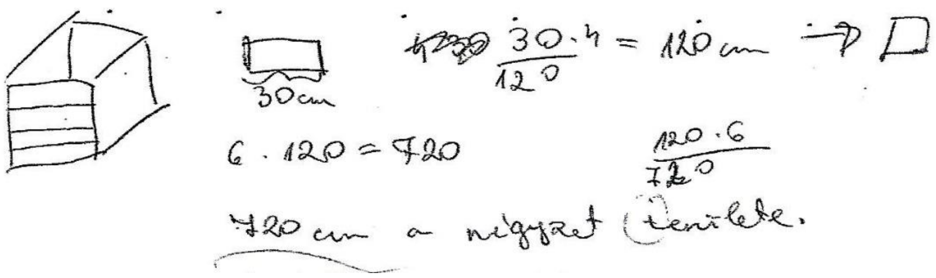
4. sz. ábra

Az 5. sz. ábrán egy olyan megoldás látható, ahol a kerület helyes képletéből kiindulva a hallgató áttér a téglalap kerületéről a téglalap területére (erre utal a 30 cm helyett, az alkalmazott 30 cm^2 is), innen pedig már adódik a feladat hibás megoldása. Úgy gondoljuk, hogy ebben az esetben a hallgató számára nem tudatosult, hogy a feladatban a keskeny téglalapot határoló vonal hosszát kellett volna figyelembe vennie, és ebből kiszámítani a négyzetet határoló vonal hosszát.



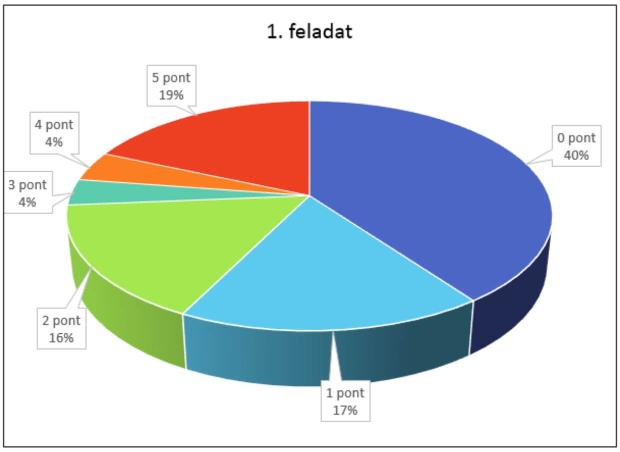
5. sz. ábra

A 6. sz. ábrán látható megoldás alapján a hallgató nem egy síkbeli, hanem egy térbeli problémán gondolkozott, az ábrán ugyanis nem egy négyzet, hanem egy kocka látható. A számításokból az is látható, hogy értelmezése alapján a kocka egyik lapjának a területét kell kiszámítani a keskeny téglalap adataiból, majd pedig innen a kocka felszínének megadása következik, erre a 6-tal való szorzásból következtethetünk. Szomorú látni, hogy hányfajta fogalom keveredik a feladat megoldása során: négyzet-kocka, síkbeli-térbeli probléma, kerület-terület, terület-felszín.



6. sz. ábra

Az alábbi kördiagram megmutatja, hogy a hallgatók milyen sikerrel oldották meg ezt a feladatot. Megdöbbentően magas azoknak a hallgatóknak a száma, akik egyetlen pontot sem kaptak a feladatra, de még inkább elszomorító az, hogy 73% azon hallgatók aránya, aki 2 vagy annál kevesebb pontot szereztek a feladat megoldása során.



7. sz. ábra

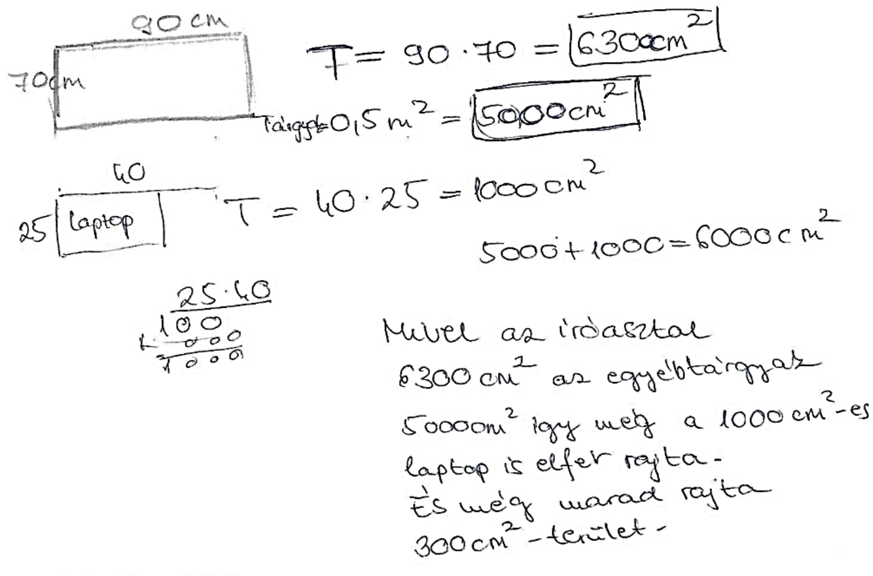
2.3. A területszámítással kapcsolatos feladat

Flóra a 70 cm x 90 cm-es méretű íróasztalán tart egy olvasólámpát, egy cserép virágot, egy tolltartót, egy jegyzettömböt, valamint könyveket és füzeteket. Ezek fél négyzetméternyi helyet is elfoglalnak az asztalon.
Elfér-e még egy 40 cm x 25 cm-es laptop Flóra asztalán?

2.3.1. A feladat helyes megoldása

A 8. sz. ábrán a feladat helyes megoldását láthatjuk. Nagyon szépen látható, hogy a hallgató tisztában van a terület fogalmával és a négyzetméter-négyzetcentiméter közötti pontos átváltással is.

Érdekesség: A feladat felsőbb éves hallgatókkal történt megbeszélése során felmerült egy olyan hallgatói észrevétel, hogy: „Csak úgy lehet megoldása a feladatnak, ha a tárgyak nem lehetnek szándékosan úgy elhelyezve (szétszórva) az asztalon, hogy bár maradék hely a számítások szerint összességében elegendő, mégsem lehet elhelyezni a laptopot.” Ez az észrevétel valóban jogos, azonban a feladat megoldása során egyetlen elsőéves hallgatóban sem merült fel, hogy a tárgyakat ilyen „csalafinta” módon helyezzék el.

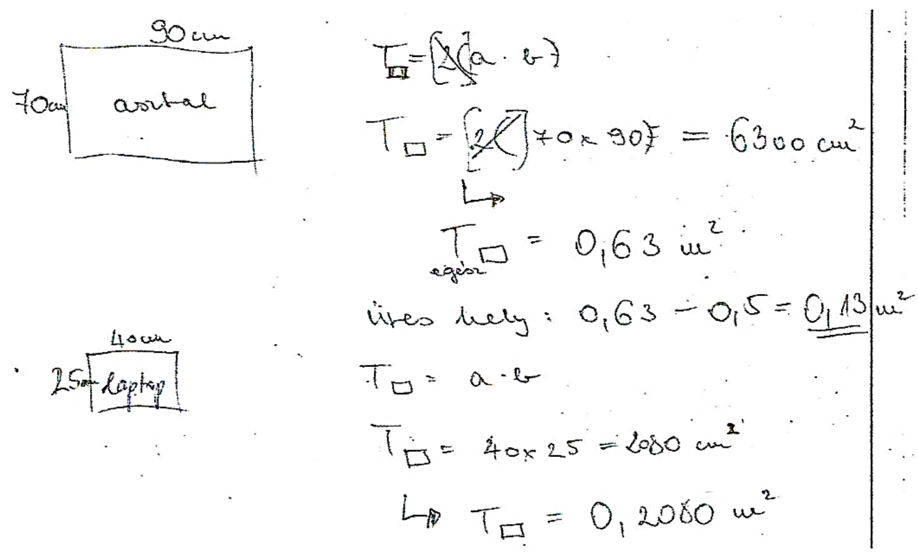


8. sz. ábra

2.3.2. A feladat néhány hibás megoldása

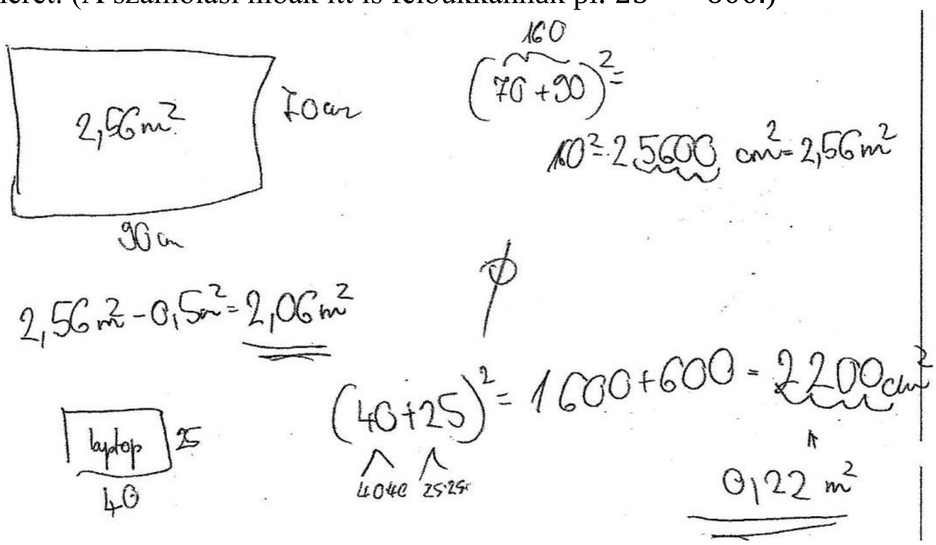
Vizsgáljuk meg az alábbiakban a feladat néhány tipikusan előforduló hibás megoldását!

A 9. sz. ábrán látható megoldás esetében a hallgató pontosan tisztában volt azzal, hogyan kell megoldania a feladatot. A problémát az okozta, hogy hibásan számolta ki a 40 · 25 szorzat eredményét. (Valószínűleg írásban számolt, és a szorzás második sorában rossz irányba tolta el egy helyi értékkel az eredményt.) A szintfelmérő dolgozat megírása során az egyik nagy problémát az okozza a hallgatóink számára, hogy hosszú idő óta először nem használhatnak számológépet. A hallgatóink első évfolyamos óráinak első félévében hosszú és kemény munka az, hogy újra „megtanítsuk" őket számológép nélkül számolni.



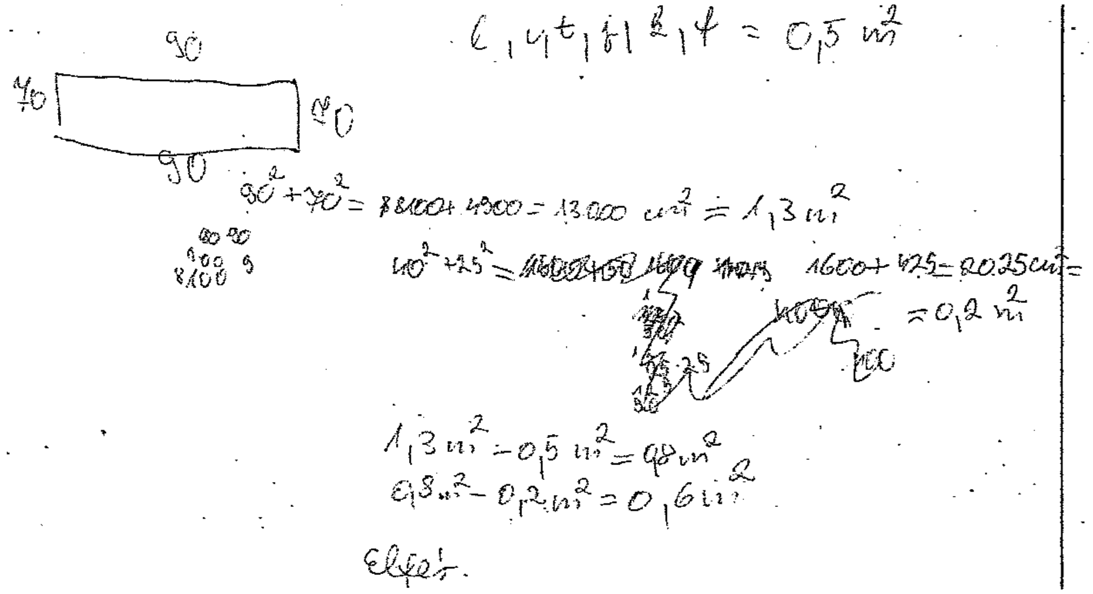
9. sz. ábra

A 10. sz. ábrán látható megoldásról az jut eszünkbe, hogy a hallgató tudását valószínűleg nem alapozták meg megfelelően sokféle szemléltetéssel, kirakással. Az alkalmazott „képlet" a kerület és a területképletek egyfajta „egyvelege", ráadásul a $(40+25)^2 = 40^2 + 25^2$ hibás algebrai átalakítás a két tag összegének négyzetére szintén egy jól ismert téves, helytelenül rögzült ismeret. (A számolási hibák itt is felbukkannak pl. $25^2 = 600$.)



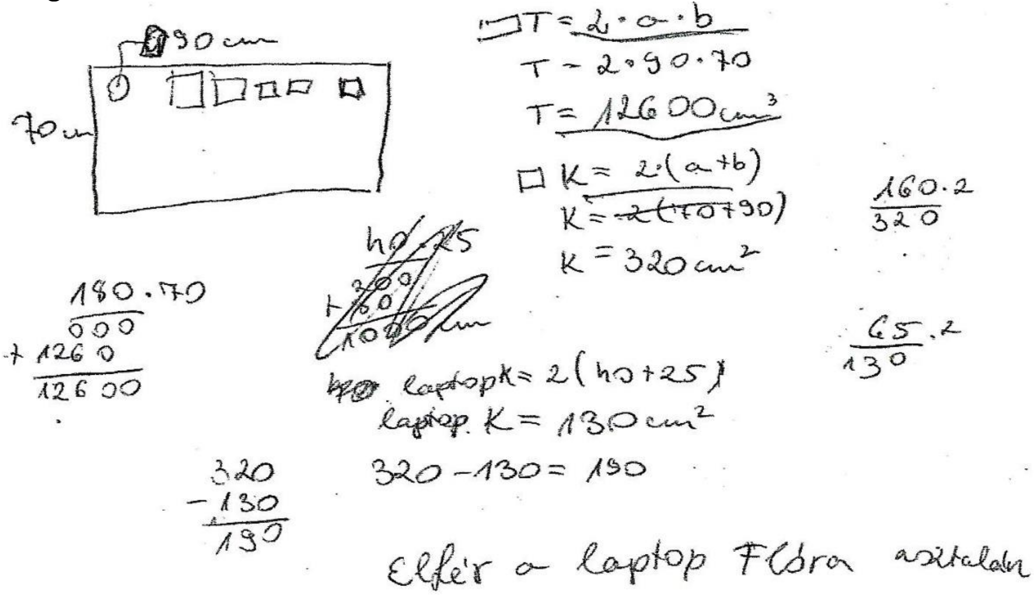
10. sz. ábra

A 11. sz. ábrán látható megoldás a 10. sz. ábrán látható megoldási útnak egy újabb variációja, végképp nehezen követhető, hogy honnan származhat a hallgató által alkalmazott „képlet”. (Ebben az esetben is találunk számolási hibát, itt pl. $25^2 = 425$.)



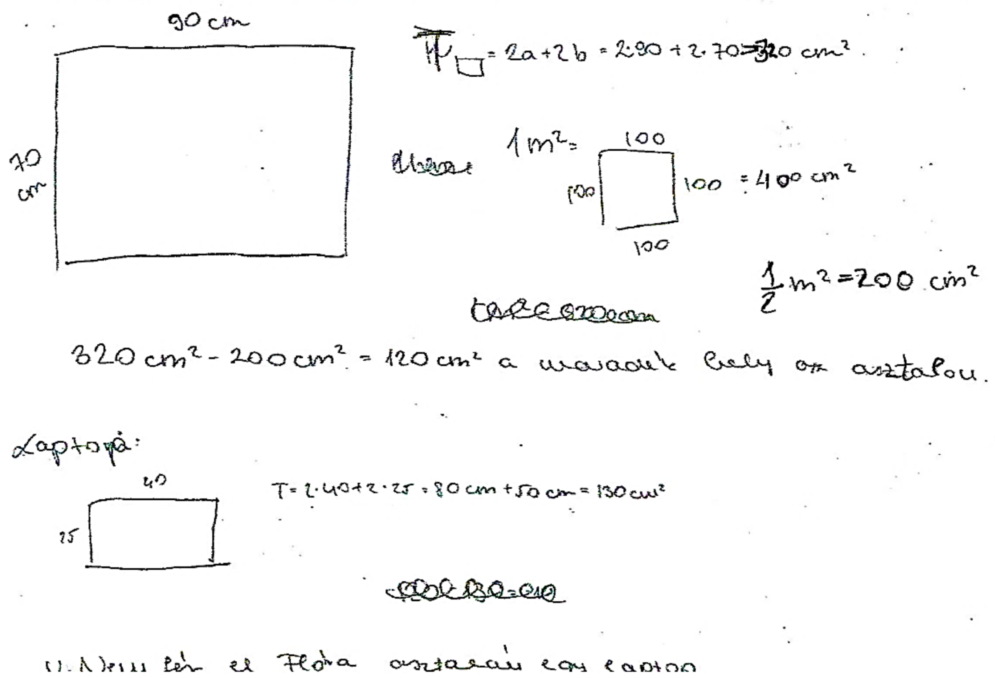
11. sz. ábra

A 12. sz. ábrán egy majdnem jó területképlet és némi számítás után áttérünk a téglalap kerületére, majd így számolunk tovább centiméter helyett azonban négyzetcentimétert használva. Érdekessége még a megoldásnak, hogy a „fél négyzetméternyi hely”, amelyet a tárgyak elfoglalnak az asztalon, végül kimarad a számításból, felesleges adatnak bizonyul a feladat megoldása során.



12. sz. ábra

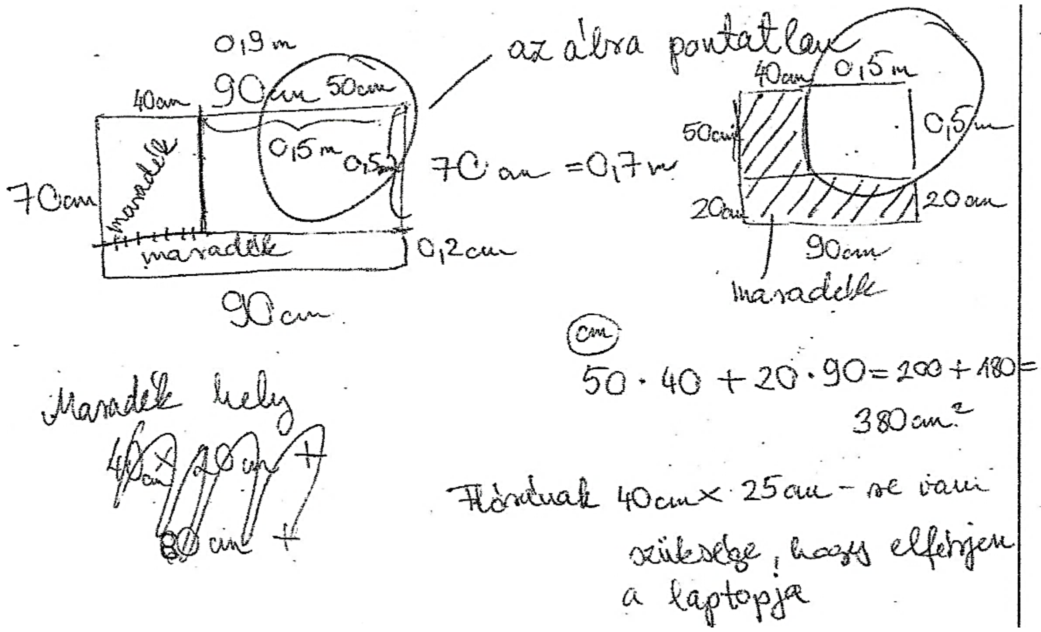
A 13. sz. ábrán látható megoldásban a hallgató ismét csak a kerületképletet alkalmazza a téglalap területének kiszámításához, de a megoldásnak nem ez az igazán meglepő része. A jobb oldalon látható kis négyzet adataiból (mely 1 m^2 és így minden oldala vélhetőleg 100 cm) és a területképlet helyett a kerületképlet hibás alkalmazásából adódik az 1 m^2 = 400 cm^2 átváltás, innen pedig azonnal „látható”, hogy a feladatban szereplő fél négyzetméter 200 cm^2-rel lesz egyenlő.



13. sz. ábra

Megjegyzés: A feladatban található hibás átváltást látva, felsőbb évfolyamos hallgatókkal egy Geometria tantárgy-pedagógia órán színes papírból kivágtunk 100 darab 10 cm x 10 cm-es négyzetet. A 100 darab négyzet felhasználásával pedig kiraktunk egy nagyobb négyzetet, amelynek így minden oldalán 10 színes négyzet foglalt helyet. A hallgatóknak ezáltal lehetőségük nyílt arra, hogy testközelből tapasztalják meg azt, mit jelent, hogy egy alakzat területe 1 m^2.

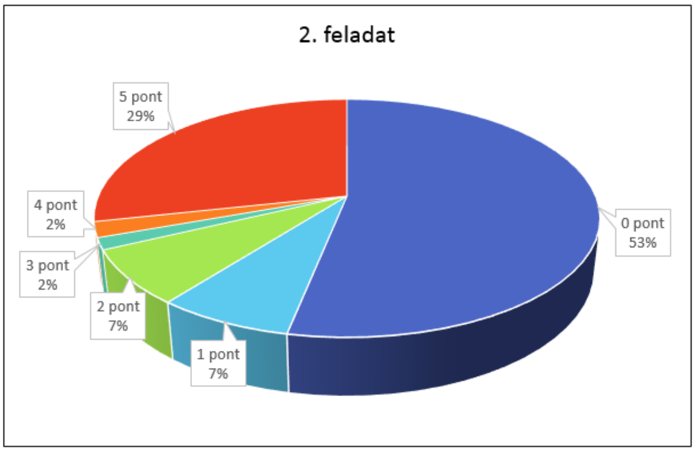
A 14. sz. ábrán szereplő rajz és megoldási mód volt a legnépszerűbb a hallgatók körében. Az ábra jobb oldalán szereplő téglalapon szépen látható, hogy a hallgató lerajzolja a feladatban szereplő 70 cm x 90 cm-es téglalapot, majd abból levág egy olyan négyzetet, amelynek minden oldala 50 cm-es (hibásan feltételezve, hogy az 50 cm = 0,5 m oldalhosszúságú négyzet területe fél négyzetméter), és így akár már a rajzból is számítás nélkül „látható”, hogy a laptopnak el kell férnie Flóra asztalán.



14. sz. ábra

Megjegyzés: A 13. sz. ábrához írt megjegyzésben említett 1 m^2-es négyzet kirakása során megbeszéltük ezt a megoldási hibát is a hallgatókkal. A kirakásból minden hallgató számára azonnal kézzelfoghatóan láthatóvá vált az a tény, hogy a 0,5 m oldalhosszúságú négyzet területe miért nem lehet fél négyzetméter.

Az alábbi kördiagram azt mutatja meg, hogy a hallgatók milyen eredménnyel oldották meg ezt a feladatot. Jól látható, hogy a hallgatóknak csupán körülbelül a negyede (29%-a) tudta megoldani helyesen a feladatot, és több mint a felük egyáltalán nem tudott érdemi megoldást adni a problémára.



15. sz. ábra

3. Összegezés

A szintfelmérő dolgozat két bemutatott feladatának megoldása során alkalmazott módszereket, technikákat áttekintve következtetni tudunk arra, hogy melyek azok a kérdések, amelyekre a jövőben nagyobb hangsúlyt kell fektetnünk (Ambrus 2004). Véleményünk szerint további javulást úgy lehet elérni, ha a tantervben jobban hangsúlyozzuk a praktikus ismeretek elsajátítását és tanítását.

Milyen praktikus ismeretekre gondolhatunk a kerület, a terület és a mérés fogalmának alaposabb elmélyítéséhez és megértéséhez?

- „A hosszúság fogalmának kimunkálása elsősorban a különféle hosszúság jellegű mennyiségek: a magasság, hosszúság, szélesség, vastagság, mélység, körméretek (köztük a kerület) külön-külön való megtapasztalását, majd összekapcsolását jelenti az iskolai tevékenységekben." (C. Neményi 2007: 141) Fontos, hogy a gyerekek a kerület kapcsán a körbekerítéssel, körbeméréssel találkozzanak, és semmiképpen se képletek alapján számolják a téglalap kerületét. (Pintér 2013) „A hosszúságfogalom lényegéhez nem tartozik hozzá a szabványos egységgel való mérés, a fogalomépítésnek nem szükségszerű velejárója a szabványos egységek elnevezésének, rendszerének megtanulása és a mértékváltás. A gyakorlati életben azonban szükségük lesz a gyerekeknek ezekre az ismeretekre is: a számkörbővítés rendjének megfelelően célszerű kidolgozni őket." (C. Neményi 2007: 143)
- „Amint a hosszúságról, úgy a területről is valamilyen mozgással célszerű tapasztalatokat gyűjteni. … A terület mérését úgy kezdhetjük, hogy a gyerek saját testét használjuk egységnek, és az egységekkel megpróbálják egészen befedni a felületet, amelynek területét mérni akarják." (C. Neményi 2007: 145) A terület mérése ne kötődjön csak az egységnégyzettel méréshez, más alakzatok is legyenek egységek! Sok konkrét tapasztalatot szerezzenek a gyerekek arról, hogy ezen a szinten a területet lefedéssel mérhetik meg. (Pintér 2013) „Fontos tudatosítani a valóságos mérések során, hogy az egység alakjától nem, hanem csak a nagyságától függ a mérendő mennyiség mérőszáma. … A téglalap terület-mérőszáma és oldalhosszainak mérőszáma közti kapcsolat építésére adjunk olyan feladatsorozatokat, amelyekben például a téglalapok azonos szélességűek, csak a hosszúságuk különböző. … Ismét más tapasztalatot jelent olyan téglalapok területének „kitalálása", amelyek nincsenek négyzethálóval befedve, csak „mögöttük" látható a háló. … A téglalap területének mérése alapja lehet további terület-meghatározásoknak. Az alsó tagozaton elsősorban rácssokszögek területének meghatározására gondolhatunk." (C. Neményi 2007: 148)
- „A könnyebb átláthatóság mellett a kellően általános tapasztalatok biztosítása is azt teszi szükségessé, hogy a mértékváltás gondolatát sok alkalmi egységválasztással szolgáljuk. Nem célszerű sietni az elvont számfeladatok gyakorlásával a gyakorlati mérések rovására. A lelkiismeretes pedagógus a jól szervezett gyakorlati mérések végeztetését tekinti feladatának, amelyet aztán sokféle összefüggés leolvastatásával tesz igazán fejlesztővé. A mértékváltás gyakorlását az elvégzett mérésekhez kapcsolja közvetlenül és később már a képzelet bevonásával." (C. Neményi 2007: 144)

A fenti gondolatok megfogadásával bízunk benne, hogy hallgatóink mélyebben sajátítják el az alsó tagozatos matematika tanításához szükséges feladat-megoldási technikákat, módszereket, valamint a képzésünk pozitív hatással lesz a feladatmegoldási kompetencia fejlődésére is.

Irodalom

Ambrus G. 2004. A gyakorlás újfajta értelmezése a matematikadidaktikában és a matematikatanárok képzésében. *A Matematika Tanítása* 12(3): 10–15.

Bagota M.–Szitányi J. 2018. Tanító szakos hallgatók matematikai ismereteinek szintfelmérése. *Képzés és Gyakorlat* 16(1): 63–72. http://real.mtak.hu/84754/1/07_Bagota_Szitanyi_tanulmany_TP_2018_1_u.pdf (Letöltve: 2020. 01. 10.)

C. Neményi E.–R. Szendrei J. 2010. *A számolás tanítása. Szöveges feladatok*. Budapest: ELTE Eötvös Kiadó.

C. Neményi E. 2007. *Geometria tananyag és a geometria tanulása az alsó tagozaton.* Budapest: ELTE Eötvös Kiadó.

Csíkos Cs.–Szitányi J.–Kelemen R. 2012. The effects of using drawings in developing young children’s mathematical word problem solving: A design experiment with thirdgrade Hungarian students. *Educational Studies in Mathematics* 81(1): 47–65. https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10649-011-9360-z (Letöltve: 2020. 01. 10.)

Dancs G.–Kulman K.–Pintér M. 2017. Elsőéves tanítóképzős hallgatók matematikai képességfelmérésének eredményei. *Válogatott tanulmányok a pedagógiai elmélet és szakmódszertanok köréből*. http://www.irisro.org/pedagogia2017januar/52DancsGabor-KulmanKatalin-PinterMariann.pdf (Letöltve: 2020. 01. 10.)

Pintér K. 2013. Matematika tantárgypedagógia. *„Mentor(h)áló 2.0 Program”.* http://www.jgypk.hu/mentorhalo/tananyag/Matematika_tantrgypedaggia/index.html (Letöltve: 2020.01.10.)