Hagyomány és fejlődés a matematikatanításban – a múltból táplálkozó matematikafeladatok

Kórus Péter – Pintér Klára
Szegedi Tudományegyetem, Szeged

Bevezetés

A magyar matematikaoktatási hagyomány leghíresebb alakja Varga Tamás, az ő nevével fémjelzett komplex matematikatanítási reform az 1970-es években világhírűvé tette a magyar matematikatanítást. A reformnak voltak előzményei a magyar matematikatanításban, és a mai napig kutatják a reformban alkalmazott módszereket és annak lehetőségeit, hogy minél szélesebb körben alkalmazzák ezeket a pedagógusok. A felfedeztető matematikaoktatás manapság többnyire az Inquiry Based Mathematics Education (IBME) alapelveiben jelenik meg, aminek fontos része a problémaalkotás. A problémaalkotási képesség fejlesztése fontos a tanulók számára a problémaérzékenység és a problémamegoldó-képesség fejlesztése miatt. A tanítók, matematikatanárok számára ezen túlmenően az is lényeges, hogy a tanítványaiknak tudjanak olyan problémákat, feladatokat adni, amelyek kapcsolatban állnak más tantárgyakkal, a hétköznapi élettel. Így a hagyomány olyan módon is megjelenik a matematikaoktatásban, hogy történelmi témákhoz kapcsolódó matematikai problémákat alkotunk.

1. Hagyomány és fejlődés a matematikaoktatásban

Az első magyar nyelvű matematikakönyvet Maróthi György írta 1743-ban *Arithmetica* címmel (Hajnal 1985). Maróthi már ebben a könyvében fontosnak tartotta, hogy a tanulók értsék a matematikát, és ennek érdekében fokozatosan építette fel a tananyagot.

Ezután kevésbé haladó szellemű tankönyvek következtek, amelyek az ismereteket bevezetés nélkül közölték, és feleslegesen használtak idegen szavakat, ezáltal formális tudást közvetítettek. Ezek kritikáját Kőnig Gyula fogalmazta meg 1879-ben, aki a formalizmus helyett a fogalmi alapozás fontosságát hangsúlyozta.

1892-ben Csáky Albin miniszter értekezletet hívott össze az egységes gimnáziumokról, amelyen Beke Manó összefoglalta a matematikaoktatás előtt álló feladatokat: a cél az alkalmazható tudás megszerzése kellene, hogy legyen, kapcsolatot kell teremteni a matematika és a környezet között a mennyiségek vizsgálatával, valamint a hiányos térszemlélet fejlesztést pótolni kell. A tehetséggondozásban ez sikeresen megvalósult, kezdve a Mathematikai és Fizikai Társulat 1891-es megalakulásával. Arany Dániel 1894-ben elindította a *Középiskolai Matematikai Lapok*at, amelynek feladatain matematikusok sok generációja nőtt fel, és manapság is fontos a matematika iránt érdeklődő középiskolások számára a magas szintű problémamegoldás gyakorlása szempontjából. 1894-ben megszervezték az első országos matematikaversenyt. A minden korosztály számára elérhető, különböző matematikaversenyek azóta is lényeges elemei a tehetséggondozásnak.

1906-ban megalakult a középiskolai matematikaoktatás reformbizottsága Beke Manó és Mikola Sándor vezetésével. Céljuk a matematikai gondolkodásmód fejlesztése volt. Megállapították, hogy magas színvonalú oktatás, sikeres reformok nem várhatók jól képzett, elkötelezett tanárok nélkül.

1949-től Gallai Tibor és Péter Rózsa tankönyvsorozatot írt, amelyben a formalizmussal szemben a problémafelvetést, problémamegoldást helyezték a középpontba. A tankönyvek haladó szellemük ellenére nem terjedtek el széles körben.

Az 1970-es évek előtti időből szándékosan azokat a gondolatokat emeltük ki, amelyek megjelentek Varga Tamás munkásságában is, és amelyek a mai napig aktuálisak.

A Varga Tamás nevével fémjelzett komplex matematikatanítási reform legfőbb célja a felfedeztető matematikaoktatás volt, és fő alapelvei a következők (Gosztonyi és mtsai. 2018):

1. Valóságon alapuló, cselekvő tapasztalatszerzésből kiinduló tanulás. A tevékenységek megteremtik a felfedezés lehetőségét, a diákok maguk konstruálják meg a tudásukat.
2. Eszközök használata. A reform során több állandó eszköz használatát javasolták, ilyenek voltak a logikai készlet, a színes rudak. Ezek mellett fontos szerepet kaptak az alkalmi eszközök, amelyek a gyerekek környezetéből kerültek ki.
3. Az egységes és széles alapozás a matematika olyan területeit vezette be már az alsó tagozatos matematikatanításba is, mint a kombinatorika, halmazok, valószínűség, számrendszerek.
4. Életkori sajátosságok figyelembevételével kell a matematika új területeit bevezetni az iskolai oktatásba tevékenységek, játékok által.
5. A tévedés szabadsága, a vita, a kommunikáció, a kételkedés, az érvelés fontos elemei a felfedezésnek.
6. Az örömteli tanulás légkörének megteremtése, a gyerekek kíváncsiságának fenntartása játékok, önálló tevékenységek által olyan belső motivációt jelent, amely hatékonyabb tanulást eredményez.
7. Az absztrakciós folyamat hosszú távra való megtervezése a formalizmus elkerülése és az új témák tanítása miatt is fontos.

Az 1978-as tanterv már a komplex matematikatanítás elvei szerint íródott, elkészültek a tankönyvek, továbbképzéseket tartottak tanítóknak, matematikatanároknak, azonban minél magasabb évfolyamot tekintünk, annál kevésbé sikerült a gyakorlatban általánossá tenni a felfedeztető matematikaoktatást. Az 1743 óta több ízben megfogalmazott célok sajnos a mai napig nem teljesültek maradéktalanul, és ma is aktuálisak. A magyar diákok a nemzetközi átlag fölött teljesítenek a TIMSS felméréseken, amelyek a tananyag ismeretén alapulnak, azonban az alkalmazható tudást kívánó PISA méréseken az átlag alatt szerepelnek.

A NAT 2020 a matematika területén a fogalmak fokozatos bevezetését, az absztrakció hosszú távú tervezését, a problémamegoldást, az alkalmazható tudás megszerzését tekintve a komplex matematikatanítás elvei szerint íródott, a kerettantervben javasolt tevékenységek segítik a felfedeztetést. A NAT 2020-hoz elkészült C. Neményi Eszter, Oravecz Márta, Móricz Márk: *Építsük fel! Matematika 1−2.* tankönyvek (C. Neményi és mtsai. 2021a,b) a régi könyvek felújítását jelentik, és teljes mértékben a komplex matematikatanítási hagyományokra épülnek.

A matematikaoktatással kapcsolatos nemzetközi tanulmányok többnyire Inquiry Based Mathematics Education (IBME) néven említik a felfedeztető matematikaoktatást (Maass 2013), amelynek fő elvei hasonlóak a komplex matematikatanítás elveihez:

1. Értve tanulás.
2. Aktív tanulás.
3. Gondolkodásra nevelés: problémamegoldás, problémaalkotás.
4. Alkalmazható tudás: kapcsolat más tantárgyakkal.
5. Kooperatív munkaformák alkalmazása.

A Magyar Tudományos Akadémia módszertani pályázata keretében 2015 óta folynak kutatások a magyar matematikaoktatási hagyományokra épülő, az új magyar és nemzetközi eredményeket figyelembe vevő matematikaoktatás minél szélesebb körben való elterjesztése érdekében. A kutatások fő célja a pedagógusok támogatásának kidolgozása és megvalósítása.

3. Múltból táplálkozó matematikafeladatok

Az IBME elveiben megjelenik a problémaalkotás, problémaérzékenység. A problémamegoldás és a problémaalkotás fejlettségi szintjei között kapcsolat van, hatnak egymásra, így ezek együtt is fejleszthetők (Ellerton 2013). A problémaérzékenység, a problémaalkotás segíti a matematika és más tantárgyak közötti kapcsolatok felismerését, megfogalmazását. Problémát alkothatunk adott szituációhoz, adatokhoz, adott módszerhez, adott megoldáshoz. A következőkben a XXV. Apáczai-napok felhívásához, az abban szereplő személyekhez, eseményekhez alkotott matematikafeladatokat fogjuk bemutatni. A problémákat különböző kurzusokon résztvevő, tanító szakos hallgatók találták ki, inspirálták. A legtöbb esetben a megoldásokat vagy válaszokat is leírjuk az olvasó kényelme érdekében.

3.1. Apáczai Csere Jánoshoz kapcsolódó feladatok

Apáczai Csere János kora, illetve könyvírói tevékenysége ihlette problémák:

- Apáczai Csere János 1625-ben született Apácán. Megközelítőleg hány generációval később születik ma egy gyermek? Két emberi generáció között nagyjából 25-30 év telik el. *Megoldás*: Először kiszámoljuk a születések közt eltelt időt: 2021–1625=396. Így a generációk száma megközelítőleg 396/30≈13 és 396/25≈16 közé tehető.
- Apáczai Csere János könyvírása közben, a 70. oldal alján felsóhajtott: -Mennyi számjegyet kellett már felírnom az oldalak alján a számozáskor! És még kétszer ennyi jegyet kell felírnom, mire végzek a munkámmal! – Hány oldalas könyvet szándékozik írni Apáczai Csere János? *Megoldás*: Eddig 9x1+61x2=131 jegyet kellett felírnia. Tehát még 131x2=262 jegyet tervez felírni. A kétjegyűekhez még 29x2=58 jegy fog kelleni, a háromjegyűekhez pedig ezek szerint 262–58=204 kell. Ez 204/3=68 háromjegyű számot jelent. Tehát az utolsó oldalszám, azaz az oldalak száma 167.

3.2. Városi rang adományozásával kapcsolatos feladatok

V. István király 750 éve adományozott városi rangot Győrnek. Kapcsolódó kérdések:

- Mikor történt ez? *Válasz*: 1271-ben.
- Melyik naptár szerint mikor történt? *Válasz*: 1271-ben, a Julianus-naptár szerint, amit i.e. 45-ben vezettek be, a Gergely-naptárt a Julianus-naptár megreformálásaként vezették be 1582-ben.
- Mi történt még akkor? *Válasz*: Például a IV. Béla halála utáni trónutódlási harcok.
- Rakd sorba a városokat aszerint, hogy mikor kaptak városi rangot: Debrecen, Eger, Pécs, Szeged, kezdd a legrégebbivel! *Válasz*: Szeged (1498), Eger (1688), Debrecen (1693), Pécs (1780).
- Ábrázold diagramon a magyarországi városok számát!

év	1980	1990	2000	2010	2021
db	95	163	236	327	346

- Keress településeket az alábbi kategóriákba!
  - Metropolis: 1 millió lakos felett
  - Nagyváros: legalább 100 000 lakos
  - Középváros: 20 000−100 000 lakos
  - Kisváros: 5 000−20 000 lakos

– Község: legfeljebb 5 000 lakos

Válaszok: Metropolis: Budapest; nagyváros: Győr, Szeged; középváros: Érd, Jászberény; kisváros: Balassagyarmat, Csongrád; község: Akasztó, Iváncsa.

3.3. Széchenyi Istvánhoz kapcsolódó feladatok

230 esztendeje született Széchenyi István. Problémák:

- Rajzold le Széchenyi István családfáját a szüleivel, testvéreivel és gyermekeivel!
- Hányféleképpen írták a nevüket a családtagjai? *Megoldás*: Kétféleképpen: Széchényi, Széchenyi.
- A következő személyek közül kivel beszélgethetett Széchenyi István? Janus Pannonius, Arany János, Liszt Ferenc, Munkácsy Mihály, Bolyai János, József Attila. *Megoldás*: Széchenyi István 1791-től 1860-ig élt, így akikkel beszélgethetett: Arany János (1817–1882), Liszt Ferenc (1811–1886), Munkácsy Mihály (1844–1900), Bolyai János (1802–1860).
- Keress képeket olyan dolgokról, amelyekhez köze volt Széchenyi Istvánnak!

3.4. Szövegértési feladat

- V. István király 750 esztendővel ezelőtt adományozott városi rangot Győrnek, amikor is 32 éves volt. Másrészt, 230 esztendeje született a Győrhöz is kötődő államférfi, Széchenyi István. Számoljuk ki, hogy hány esztendő van V. István király és Széchenyi István születési éve között! *Megoldás*: V. István 2021–750=1271-ben adományozott városi rangot Győrnek. V. István 1271–32=1239-ben született. Széchenyi István 2021–230=1791-ben született. 1791–1239=552. Tehát 552 esztendő van születési éveik között.

3.5. Út-idő-sebességes feladat

- Széchenyi István lovaskocsival, 25 km/h-s átlagos sebességgel haladva ért Bécsből Győrbe. Bécs és Győr távolsága 122 km. Ha ma autóval megtesszük ugyanezt a távolságot, 80 km/h-s átlagsebességgel, akkor mennyi időt spórolunk a lóval történő utazáshoz képest? *Megoldás*: Széchenyi István utazásának ideje: 122/25=4,88 óra. Az autós utazási idő 122/80=1,525 óra. Így 4,88–1,525=3,355 óra≈201 perc a megspórolt idő.

3.6. Kombinatorikai feladatok

Szinte bármely szó, mint például Széchenyi István családneve vagy például Győr neve ihlethet esetösszeszámlálás, kombinatorikai példát:

- Hányféleképpen tudjuk kiolvasni Széchenyi nevét balról jobbra haladva a „hídon” úgy, hogy függőlegesen tetszőlegesen mozoghatunk fel-le?

S								I
S	Z	É	C	H	E	N	Y	I
S	Z	É				N	Y	I
S	Z						Y	I

Megoldás: Az S betű 4-féle lehet, a Z 3-féle, az É 2-féle, a C, H, E 1-1-féle lehet csak, míg az N ismét 2-féle, az Y 3-féle, az I 4-féle lehet. Ez összesen 4x3x2x1x1x1x2x3x4=576 esetet jelent, mivel szoroznunk kell a lehetőségeket.

- Hányféleképpen olvasható ki Győr latin neve, az ARRABONA szó, az alábbi ábrából, ha csak jobbra és lefelé léphetünk?

A	R	R	A	B	O	N	A
R	R	A	B	O	N	A	
R	A	B	O	N	A		

Megoldás: Felírjuk minden betűhöz, hogy hányféleképpen lehet oda eljutni a bal felső sarokból. Az adott számot úgy kapjuk meg, hogy a közvetlen felette és a közvetlen balra lévő számokat összeadjuk. Így a következő számokat kapjuk:

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	
1	3	6	10	15	21		

Innen a lehetséges esetek száma 1+7+21=29.

3.7. A győri csata dátumához kapcsolódó feladat

– A híres győri (kismegyeri) csata 1809. június 14-én zajlott a magyar nemesi felkelés hadai és Napóleon seregei között. Hány nap volt még hátra ebből az évből a csata után? *Megoldás*: Az első 5 hónapban összesen 31+28+31+30+31=151 nap van. Ehhez még hozzáadódik 14 nap júniusból, ez 151+14=165 napot jelent. Így 365–165=200 nap volt még hátra az évből.

4. Csatákhoz, várakhoz köthető problémák

A történelem, így a magyar történelem fontos részét képezik a különböző csaták, háborúk, melyekben az országok számos alkalommal harcoltak egymás ellen különböző területekért, javakért. Ezen múltbeli események számos területen hatalmas változásokat eredményeztek, elegendő csak a népességszámra, a területváltozásokra, az ipar fejlődésére vagy a kulturális hatásokra gondolni. A művészetekre és a tudományokra egyaránt nagy hatással volt a háborúzás: számos háborús témájú festmény (például Benczúr Gyula: Buda visszafoglalása), illetve számos katonai eredetű technikai vívmány született (például radar, GPS). A következő témák közül az elsőt az Apáczai-napok helyszínéül szolgáló Győr városa, pontosabban annak vára ihlette, a második téma az ehhez köthető erődprobléma, míg a harmadik téma egy gyerekekkel is játszható, csatázós játék bemutatása lesz.

4.1. Kutatási projekt Győr várának történetéről

Az oszmán veszély kivédésében stratégiai jelentősége volt Győr várának, hiszen ez a vár volt az egyik legfontosabb, amely Bécs védelmét szolgálta. Ezért 1561 és 1575 között Pietro Ferrabosco tervei alapján korszerű erődöt építettek. A korábbi téglalap alapú várak és félkör alakú bástyák helyett sokszög alaprajz és csillag alakú bástyák jellemzik. Így lehetőség van a bástyákról kartács ágyúkkal támadni a falakra kúszó ellenséget.

1. ábra A győri erőd sematikus rajza a 16. századból
Forrás: Kulcsár 2017: 1.

1594-ben Kodzsa Szinán nagyvezír néhány tízezer fős seregével vonult Győr ellen. A várat Ferdinand Graf zu Hardegg kapitány és Niklas Perlin hadmérnök vezetésével 5−6000 fős katonaság védte. Az ostrom két hónapig tartott, ekkor a várat a kapitány feladta, a védőknek szabad elvonulást ígértek. Ezért a tettéért Hardegg kapitányt és Perlint is lefejezték. A kapitány az ostrom alatt számtalanszor kért segítséget, azonban a felmentő sereg nem érkezett meg. Más várak ostromát is érdemes megvizsgálni, mennyiben számított az erőd védelmi rendszere, az ágyúk száma, a lőpor és az élelem mennyisége. Ezekkel az eszközökkel a védekezés idejét lehetett meghosszabbítani, a várak felszabadítását csak a felmentő sereg tudta elérni.

Győr várát a törökök tovább erősítették, és meg voltak győződve, hogy bevehetetlen. Azonban 1598-ban Mahmud beglerbég kapitánysága alatt lazult a katonák fegyelme, és amikor 200 janicsár Budára ment a zsoldért és élelemért a Pálffy Miklós esztergomi kapitány és Adolf von Schwarzenberg által vezetett magyar sereg gyors, cseles rajtaütéssel visszafoglalta a várat. Töröknek öltözött katonák szekérrel mentek a kapuhoz, amelyet sikerült berobbantani, és a katonák így behatoltak a várba, amelyet komoly „utcai harcokban" visszafoglaltak. Lényeges volt a megszerzett információ a védelem gyengüléséről, a stratégia, a csel. Jutalmul Pálffy Miklós 1000 arany értékű kupát kapott, ám visszautasította, mondván, hogy a hazájáért tette. Ugyanakkor Schwarzenberg 100 000 aranyat és egy morvaországi várost kapott.

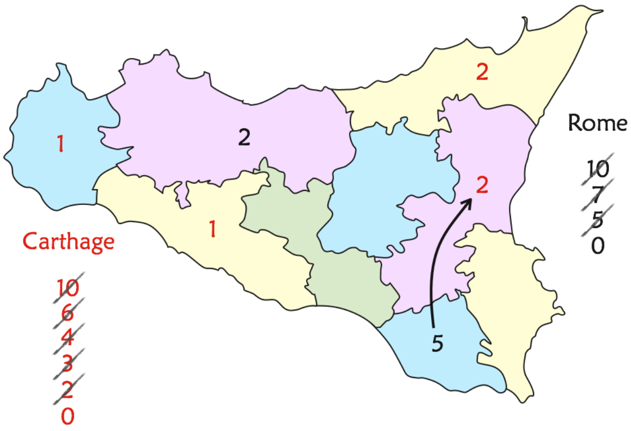
4.2. Képtár- és erődprobléma

A várak védelméhez híres matematikai problémák is kapcsolódnak. A képtárproblémát Victor Klee vetette fel 1973-ban. A kérdés az, hogy minimálisan hány őr szükséges ahhoz, hogy az őrök belássák a sokszög alakú képtár egészét (O'Rourke 1987). Václav Chvátal bebizonyította, hogy egy n csúcsú sokszög belsejének őrzéséhez n/3 alsó egészrésze számú őr elegendő. A szükségesség több esetre bomlik, és a helyek keresésére különféle NP hosszúságú algoritmusokat találtak, azonban van olyan darabolásos algoritmus, amely n log n lépésből áll.

A vár védelme azonban nem a sokszög belsejének, hanem a külsejének a figyelését jelenti. Megint az elegendőséget bizonyították: n csúcsú sokszög külsejének őrzéséhez n/2 felső egészrésze számú őr elegendő. Ekkor még fontos kérdés marad, hogy hova helyezzük az ágyúkat a várfalon. Korabeli feljegyzések szerint Győr elestekor hibáztak ebben, voltak a várfalnak olyan részei, amelyeket nem tudtak ágyúval védeni.

4.3. Foglalj, támadj játék

Az „A little bit of Aggression" nevű játékot (magyarul: „Foglalj, támadj" játéknak fordíthatjuk) akár az általános iskolai osztályteremben is játszhatjuk (Solomon 1973). Két játékos kap egy térképet, amelyen országok határai láthatók. Mindkét játékosnak 10-10 hadserege van. A hadseregek lehelyezésekor felváltva raknak egy országba tetszőleges számú hadsereget. Akinek elfogynak a seregei, passzol. Az a játékos kezdi a támadást, amelyik először passzolt. A támadás során azt az országot tudja egy játékos elfoglalni, amellyel határos országokban neki több serege van, mint az ellenfélnek a megtámadott országban. Ekkor a megtámadott seregek elvesznek, a támadók azonban nem szenvednek veszteséget. A játék akkor ér véget, ha már nem lehetséges több támadás, ekkor az a játékos győz, akinek több országa van. Ha ez egyenlő, akkor a megmaradt seregek száma dönt. A játékot érdemes hosszan ugyanazzal a térképpel játszani, így ki lehet tapasztalni a sikerre vezető stratégiákat, melyik országra hány sereget érdemes helyezni. A problémamegoldási képesség fejlesztésén kívül a játék a gyorsszámolási készséget is fejleszti, így már 1−2. osztályosok számára is hasznos.



2. ábra Kép az „A little bit of Aggression” játékról
Forrás: Solomon 1973: 16.

Összegzés

A problémaalkotás a matematikaoktatás fontos része. Számos módon készíthetünk matematikai tartalmú feladatokat, feladványokat, játékokat. Tanulmányunkban bemutattunk több olyan matematikai problémát, amelyek a múltból táplálkoznak: a XXV. Apáczai-napok felhívásához kapcsolódó Apáczai Csere János, Széchenyi István, V. István, Győr és a városi rang is ihletett példákat. Mint az olvasó is láthatta, többféle matematikai témakörben is készíthető a kultúrához, hagyományokhoz köthető feladat, továbbá többféle egyéb tudományág – irodalom, történelem – is megjelenhet matematikai feladatokban. Ezáltal az átlagos matematikai feladatok közé be lehet illeszteni a tanulók számára érdekesebb, megragadóbb problémákat, bővítve látókörüket. A feladatok mellett bemutattunk egy csatázással kapcsolatot kutatási projektet, egy azzal összefüggő matematikai problémát és egy ilyen témájú, matematikai tartalmú stratégiai játékot is, ezek által még színesebbé tehető egy matematikaóra az iskolában.

Köszönetnyilvánítás

A tanulmány elkészítését a Magyar Tudományos Akadémia Közoktatás-fejlesztési Kutatási Programja támogatta.

Irodalom

C. Neményi E.–Oravecz M.–Móricz M. 2021a. *Építsük fel! Matematika gyűjtemény 1*. Budapest: Oktatási Hivatal Kiadó.

C. Neményi E.–Oravecz M.–Móricz M. 2021b. *Építsük fel! Matematika gyűjtemény 2*. Budapest: Oktatási Hivatal Kiadó.

Ellerton, N. F. 2013. Engaging Pre-service Middle-school Teacher-education Students in Mathematical Problem Posing: Development of an Active Learning Framework. *Educational Studies in Mathematics* 83: 87–101.

Gosztonyi K.–Vancsó Ö.–Pintér K.– Kosztolányi J.–Varga E. 2018. Varga's „Complex Mathematics Education" Reform: at the Crossroad of the New Math and Hungarian Mathematical Traditions. In: Shimizu, Y.–Vithal, R. (eds.): *ICMI Study 24: School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities. Conference Proceedings*, 133–140. https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/ICMI%20studies/ICMI%20Study%2024/ICMI%20Study%2024%20Proceedings.pdf (letöltve: 2021.11.23.)

Hajnal I. 1985. A matematika tanítása a magyar gimnáziumokban. In: Hajnal I.–Nemetz T.–Pintér L. (szerk.): *Matematika III-IV. osztály*. Budapest: Tankönyvkiadó Vállalat.

Kulcsár L. 2017. Győr többet érdemel – visszatemetett reneszánsz kori kincsek a Dunakapu tér alatt. *Infovilág*. https://infovilag.hu/gyor-tobbet-erdemel-visszatemetett-reneszansz-kori-kincsek-a-dunakapu-ter-alatt/ (letöltve: 2021.11.23.)

Maass, K. (szerk.) 2013. *Inquiry-based Learning in Maths and Science Classes*. https://primas-project.eu/wp-content/uploads/sites/323/2017/11/primas_final_publication.pdf (letöltve: 2021.11.23.)

O'Rourke, J. 1987. *Art Gallery Theorems and Algorithms*. New York, NY: Oxford University Press.

Solomon, E. 1973. *A Little Bit of Aggression*. https://mathpickle.com/project/a-little-bit-of-aggression/ (letöltve: 2021.11.23.)