Az aritmetikáról az algebrára történő átmenet megvalósítása – magyarországi általános iskolai tankönyvek elemzése

Fülöp Zsolt

Károli Gáspár Református Egyetem Pedagógiai Kar, Nagykőrös

Bevezetés

Az iskolai tankönyvek kulcsfontosságú eszközök a tanóra tervezése és kivitelezése szempontjából, továbbá segítséget jelentenek az adott tantárgy anyagának strukturált és szisztematikus elsajátításában. A tananyag logikus sorrendben történő felépítésével lehetőséget biztosítanak a tanórák hatékony szervezésére és a kerettantervekben megfogalmazott célkitűzések megvalósítására. A jó tankönyvekben a tananyag összhangban van az adott évfolyamon tanuló diákok képességeivel és gondolkodásának fejlődésével, valamint olyan feladatokat tartalmaznak, amelyek segítik a diákokat a tananyag elmélyítésében és alkalmazásában. A tananyagot további információkkal, példákkal és magyarázatokkal kiegészítve hozzájárulnak az adott tananyag jobb megértéséhez.

A matematika tankönyvek esetében fontos még kiemelnünk néhány sajátos követelményt. A matematikaoktatás során a differenciálás nagy jelentőséggel bír. Ezért a jó tankönyvekben szereplő feladatok nehézségi fokozata egy széles skálán mozog, ezzel támogatva a különböző képességű diákok tanulási stratégiáit. A modern oktatásban egyre inkább követelmény a gyakorlatorientált tanítás, ezért fontos, hogy a tananyaggal kapcsolatos matematikai fogalmak tanítása során a tankönyv tartalmazzon valós életből vett példákat vagy problémaszituációkat. A nemzetközi matematikaoktatásban is egyre nagyobb teret biztosítanak a tananyag gyakorlati alkalmazhatóságának, a tankönyvekben jelentősen növekszik az úgynevezett *daily life problems* (hétköznapi feladatok) részaránya. Ez bizonyos esetekben csökkenti a tipikusan matematikai feladatok számát, így olyan feladattípusok szorulnak ki vagy kerülnek háttérbe, amelyek például a bizonyítás fontosságát emelik ki, vagy az általánosítás készségének a fejlesztését szolgálják. A progresszivitás a matematika tankönyvek esetében egy kiemelt követelmény, a feladatok nehézségi fokozatának emelése megfelelő ütemben, a tanulói gondolkodás életkori sajátosságainak figyelembe vételével valósul meg. Ez különösen fontos az általunk tárgyalt témakör, konkrétan az aritmetikáról algebrára történő átmenet esetében. Az interdiszciplináris megközelítésben a matematika szervesen kapcsolódik olyan tantárgyakhoz, mint például a fizika, kémia, informatika, földrajz, ezért a tankönyvek tervezésekor ezeket az összefüggéseket is figyelembe kell venni.

Jelen tanulmány a magyarországi általános iskolás tankönyvek vizsgálatát tartalmazza (Paróczay et al. 2020), különös tekintettel az aritmetikai módszerekről az algebra eszközeire történő átmenet folyamatára. Az elemzés során azokat a fejezeteket helyeztük előtérbe, amelyek jelentőséggel bírnak az említett kérdéskör szempontjából. Köztudott, hogy az aritmetikáról az algebrára történő átmenet talán a legnagyobb tanítási és tanulási kihívást jelenti az általános iskolai oktatásban. Az átmenet egyik legnagyobb nehézsége, hogy a tanulóknak szakítani kell az aritmetikai konvenciókkal és áttérni az úgynevezett algebrai gondolkodásmódra. Ez nemcsak az oktatási stratégiákban, hanem a tankönyvek tervezése során is nagy kihívást jelent.

1. Az aritmetikai módszerekről az algebrai eszközökre való áttérés sajátosságai

Az általános iskola felső tagozatán az aritmetikáról az algebrára való áttérés több szakaszban valósul meg. Ezt Boulton-Lewis és munkatársai (Boulton-Lewis et al. 1998) a kognitív képességeknek egy többlépcsős fejlődésén keresztül mutatják be. Az általuk alkalmazott elméleti modellt Biggs és Collis dolgozták ki (Biggs et al. 1982). Ennek első fázisát *Pre-algebrá*nak nevezik. Ebben a szakaszban történik az algebrai fogalmak megalapozása, a változó és ismeretlen különböző jelentésének megismerése, a változókkal kapcsolatos helyettesítési érték kiszámítása, a változókkal végzett műveleti tulajdonságok megismerése. A tanulók algebrai gondolkodása még viszonylag kezdetleges, főként olyan szöveges feladatok megoldására korlátozódik, amelyek algebrai modellje egy $A \cdot x + B = C$ típusú egyenlet. Mivel az ilyen típusú szöveges feladatok megoldhatók tipikusan aritmetikai módszerekkel is, ezért ezeket *aritmetikai feladatoknak* is nevezzük. A problémamegoldó képességek az úgynevezett *operacionális gondolkodás* fázisában vannak, a tanulók a szöveges feladatok megoldása során konkrét műveletek elvégzésével próbálják megtalálni a helyes választ. A *Pre-algebra* szakaszából történik az átmenet az *Algebra* fázisába. Itt a tanulók megismerik az egyenlőségjelnek egy bővebb értelmezését, konkrétan azt, hogy az egyenlőségjel egy ekvivalenciát jelent, amelynek két oldalán egyenértékű (ekvivalens) kifejezések állnak. Ez lehetőséget teremt olyan szöveges feladatok megoldására, amelynek algebrai modellje egy $A \cdot x + B = C \cdot x + D$ típusú egyenlet. Ahhoz, hogy a tanulók az ilyen típusú szöveges feladatokat meg tudják oldani, szükségük van egy olyan gondolkodásmódra, amelynek során a feladat teljes „szerkezetét" átlátják. Tehát az *operacionális gondolkodást* felváltja a *strukturális gondolkodás*, ahol már nem az aritmetikai műveletek tulajdonságainak ismerete, hanem a mennyiségek közötti összefüggések felismerése és algebrai úton való felírása dominál. Ezt az átmenetet Filloy és Rojano *didactic cut*nak (Filloy–Rojano 1989), míg Herscovics és Linchevski *cognitiv gap*nek nevezik (Herscovics–Linchevski 1994). Stacey és MacGregor a „formális algebra" egy indikátorának tekintik azt, hogy a tanulók képesek helyesen felírni és megoldani az $A \cdot x + B = C \cdot x + D$ típusú egyenleteket (Stacey–MacGregor 2000).

Számos nemzetközi tanulmányban találunk utalásokat azokra a nehézségekre vonatkozóan, amelyeket a betűszimbólumok helytelen értelmezése okoz. A tanulók többsége már alsó tagozatos tanulmányai során találkozik az ismeretlenek különféle értelmezésével, például az olyan feladatok megoldása során, ahol az ismeretlen mennyiség helyén egy üres négyzet szerepel. A felső tagozaton az aritmetikai módszerek tanítása során a betűszimbólumok sok esetben konkrét tárgyakat jelentenek, és a tárgyak nevének a rövidítéseként jelennek meg. Küchemann szerint a betűszimbólumok ilyen módon történő használata később félreértéseket okoz, mivel az algebrában a betűszimbólumokkal jelzett változók bármilyen mennyiséget jelenthetnek (például tömeg, hosszúság, tárgyak száma, emberek életkora, stb.). Megfigyelései szerint a 13-15 éves tanulók még nem képesek arra, hogy a betűszimbólumokat úgy kezeljék, mint ismeretleneket vagy változókat (Küchemann 1981). Stacey és MacGregor kiemelték, hogy az algebrai fogalmak félreértelmezésében a kognitív képességeknél jóval kézzelfoghatóbb tényezők is közrejátszanak, mint például:

- intuitív feltételezések és pragmatikus gondolkodás egy szokatlan jelölési rendszerrel kapcsolatban;
- analógiák egyéb olyan szimbólumrendszerekkel, amelyek a mindennapi életből, a matematika más területeiről vagy más tantárgyak jelölésrendszeréből származnak;
- az újonnan szerzett matematikai ismeretek interferenciája;
- rosszul felépített, félrevezető oktatási anyagok.

Az említett szerzők véleménye szerint a tanulók többsége nem képes olyan feladatokat megoldani, ahol a betűszimbólumokat, mint számokat kell értelmezni. Ezért azt javasolják, hogy az algebra tanítását kezdetben a betűszimbólumokon végzett konkrét műveletek szintjén kell kezelni (Stacey–MacGregor 1997).

Az algebrai kifejezések tanítása során a betűszimbólumokkal jelölt ismeretlenek mellett megjelenik a változó fogalma, így az ismeretlen-változó dualitás is komoly félreértésekre adhat okot. A tanulók nehezen értik meg például, hogy egy szöveges feladat megoldása során az ismeretlen meghatározásakor a változó mennyiség egy olyan értékét keressük, amely kielégíti az adott feladatban szereplő összefüggéseket, feltételeket.

Az algebra tanítása során viszont a legnagyobb kihívást az jelenti, hogy a tanulók szakítsanak a tipikusan aritmetikai gondolkodással és megtörténjen az áttérés az operacionális (procedurális) gondolkodásról a strukturális gondolkodásra. Mivel ez a folyamat nem spontán valósul meg, ezért szükség van a strukturális gondolkodás megalapozására és fejlesztésére. Ehhez az szükséges, hogy a tanulók az $A \cdot x + B = C \cdot x + D$ algebrai egyenletekkel modellezhető szöveges feladatokkal még az aritmetikai számítások során ismerkedjenek meg, konkrét számokkal végzett eljárásokon keresztül. Ennek érdekében próbálkoztam a hamis feltételezések módszerének bevezetésével, erre vonatkozó kutatási eredményeimet több tanulmányban ismertettem (Fülöp 2016; Fülöp 2020). Egy másik elképzelés az algebra tanításának függvénytani alapokra helyezése, ennek hatékonyságát nemzetközi kutatások eredményei is alátámasztják. Yerushalmy támogatja azt a véleményt, hogy a függvény fogalmának már az algebratanítás kezdeteitől jelen kell lennie az általános iskolai tananyagban (Yerushalmy 2000). A számítógéppel támogatott oktatás lehetővé teszi a függvények értéktáblázatának és grafikonjának az elkészítését, ezért több kutató is javasolja az algebra tanításának függvénytani alapokra helyezését (Kieran 1997; Leitzel 1989). A függvénytani alapokra helyezett matematikaoktatás nagy előnye, hogy a tanulók kezdetben a függvényekkel és változókkal ismerkednek, a szöveges feladatok megoldása során pedig konkrét számadatokkal végzett műveleteken, valamint függvények értéktáblázatának elkészítésén és a függvények hozzárendelési utasításának felírásán keresztül jutnak el az $A \cdot x + B = C \cdot x + D$ algebrai egyenletek felírásáig. A függvénytani alapokra helyezett algebraoktatás gyakorlati kivitelezésével kapcsolatos saját kutatási eredményeimet egy tanulmányban tettem közzé (Fülöp 2023), amelyben beszámoltam az említett módszer előnyeiről. Véleményem szerint az aritmetikáról az algebrára való átmenet a következő módszertani lépéseken keresztül valósítható meg:

- Szöveges feladatok megoldása konkrét aritmetikai számításokkal;
- Aritmetikai egyenletek ($Ax + B = C$ típusú egyenletek) megoldása lebontogatással;
- Szöveges feladatok megoldása aritmetikai egyenletekkel;
- Algebrai egyenletek ($Ax + B = Cx + D$ típusú egyenletek) megoldása mérlegelvvel;
- Az algebrai egyenletekkel modellezhető szöveges feladatok megoldása három egymást követő módszerrel: szisztematikus próbálgatás konkrét számadatokkal (hamis feltételezések módszere), függvénytani ismeretekkel, és végül mérlegelvvel megoldható egyenletekkel.

Az utolsó lépésben a három módszer egymás utáni alkalmazása biztosítja a strukturális gondolkodás megalapozását a konkrét számadatokkal való manipulációból kiindulva az absztrakt, betűszimbólumok manipulációján alapuló módszerek irányába.

A tankönyvek tanulmányozása során a különböző fejezeteket (és ezeken belül a feladatokat) a fentiekben bemutatott irányvonalak és követelmények mentén vizsgáltuk.

2. A kutatás megvalósítása

A kutatási tevékenységünk lebonyolításakor a Magyarországon jelenleg forgalomban lévő tankönyveket vizsgáltuk (Paróczay et al. 2020). Elemzés tárgyává tettük az 5–8. évfolyamokon használt tankönyveknek azokat a fejezeteit, amelyek közvetlen kapcsolatban állnak az aritmetikáról az algebrára való áttéréssel, konkrétan az operacionális gondolkodás megszilárdításával és a strukturális gondolkodás megalapozásával. Az elemzés során a tankönyvi feladatokat öt különböző kategóriába soroltuk a következőképpen:

- A műveleti tulajdonságok alkalmazása konkrét és absztrakt számításokban (M.T.);
- Az egyenlőségjel értelmezése (E);
- Becslés, kvantitatív érvelés mennyiségekkel (Q);
- Mennyiségek közötti összefüggések, megfeleltetések, függvények (F);
- Az ismeretlenek és változók jelentése (V).

A műveleti tulajdonságok alkalmazásával kapcsolatos feladatokban (M.T.) főként a konkrét számadatokkal való manipulációk szerepelnek. Ezek főként következő szegmenseket érintik:

- Inverz művelet, kommutativitás, asszociativitás;
- Páros és páratlan számokkal végzett műveletek tulajdonságai;
- Szöveges feladatok megoldása aritmetikai úton;
- Egészrész-törtrész kiszámítása, százalékszámítás;
- Műveleti tulajdonságok általánosítása.

Az egyenlőségjel értelmezése (E) kategóriába főként olyan feladatok kerültek, amelyekben az egyenlőségjel kitüntetett szerepet játszik. Ilyenek például az egyenletekkel és az olyan szöveges feladatokkal kapcsolatos feladatok megoldása, amelyekben a következő problémaszituációk kerülnek előtérbe:

- Az egyenlőségjel kétféle értelmezése (egyenlőség és ekvivalencia);
- Igaz/hamis kijelentések;
- Nyitott mondatok;
- Nagyobb-kisebb relációk;
- Egyenletek megoldása.

A becsléssel és a mennyiségekkel való kvantitatív érvelésekkel kapcsolatos feladatok (Q) esetében a következők szerepelnek:

- Mennyiségekre vonatkozó információk értékelése;
- Különböző mennyiségek összehasonlítása;
- Becslések;
- Több-kevesebb fogalmának alakítása;
- Következtetések megfogalmazása becslések alapján.

A mennyiségek közötti összefüggések, megfeleltetések, függvények (F) kategóriába tartozó feladatok csoportja a következő részösszetevőkre bontható:

- Adatok gyűjtése, feldolgozása;
- Egyenes és fordított arányosság;
- Hozzárendelések vizsgálata;
- Grafikonok értelmezése.

Az ismeretlenek és változók jelentésével (V) kapcsolatosan a következőket említhetjük meg:

- Változók fogalmának megismerése;
- Változók jelölése;
- Változókkal végzett műveletek;
- Az ismeretlen fogalmának megértése.

Mivel az aritmetikáról az algebrára való áttérésben az általánosítási készségek fejlesztése is kitüntetett szerepet kap, ezért azt is megvizsgáltuk, hogy milyen részarányban szerepelnek olyan feladatok, amelyekben az általánosítás valamilyen mértékben szerepet kap. Kaput (2008) véleménye szerint az algebrai gondolkodás fejlődésének három fő szakasza van: általánosított aritmetika, függvénytani gondolkodásmód és matematikai modellezés. Ilyen megközelítésben az általunk M.T., E., illetve Q. kategóriákba sorolt feladatok főként az általánosított aritmetikát érintik, míg az F., illetve V. kategóriákba sorolt feladatok a függvénytani gondolkodásmód fejlesztésében játszanak szerepet. Szintén Kaput hangsúlyozta, hogy az általánosítási készségek fejlődésének szempontjából a matematikai (és ezen belül az algebrai) gondolkodásnak két fő vetülete van: az összefüggések és szabályok általános felismerése és megfogalmazása, illetve az általános következtetések szimbólumokkal történő leírása. Az elemzés során a feladatokat ilyen szempontból alacsony általánosítást tartalmazó (továbbiakban A.Á.), illetve magas általánosítást tartalmazó (továbbiakban M.Á.) kategóriákba soroltuk.

A különböző évfolyamok esetében a következő fejezetek feladatait elemeztük és kategorizáltuk a fentiekben felsorolt szempontok szerint.

Ötödik évfolyam:
VI. Fejezet. Mérés, arányosság, szöveges feladatok
VII. Fejezet. Adatgyűjtés, statisztika

Hatodik évfolyam:
IV. Arány, százalék, szöveges feladatok
VI. Statisztika (Grafikonok, diagramok, összefüggések)

Hetedik évfolyam:
II. Racionális számok, betűs kifejezések.
V. Százalékszámítás, egyenletek.
VII. Hozzárendelések, statisztika.

Nyolcadik évfolyam:
I. Számok és betűk
IV. Egyenletek
V. Hozzárendelések

A fentiekben említett fejezetek feladatait százalékos megoszlás szerint táblázatokba foglaltuk.

Az 5. évfolyamon szereplő feladatok megoszlását az 1. sz. táblázat szemlélteti.

	M.T.	E.	Q.	F.	V.
H.É. (A.Á.)	24%	19%	18%	14%	0
Mat. (A.Á.)	5%	10%	1%	1%	0
H.É. (M.Á.)	2%	1%	1%	1%	0
Mat. (M.Á.)	2%	1%	0	0	0
Összesen	33%	31%	20%	16%	0%

1. táblázat: Az 5. osztályos tankönyvekben szereplő feladatok megoszlása
Forrás: saját szerkesztés

Amint a táblázatból is kitűnik, a feladatoknak körülbelül egyharmadát a számolásokkal és a műveleti tulajdonságokkal kapcsolatos feladatok képezik. Ez természetesnek tekinthető, mivel a mértékegységek átváltásával kapcsolatos feladatok, valamit a szöveges feladatok többsége is konkrét aritmetikai számításokat feltételez. A nyitott mondatokat tárgyaló alfejezetben az egyenlőségjel helyes értelmezésével kapcsolatos feladatok kerülnek előtérbe, ezért ezekben a fejezetekben az ilyen típusú feladatoknak a 31%-os részaránya teljesen indokoltnak tekinthető. A szöveges feladatok megoldásakor tipikusan aritmetikai módszereket alkalmaznak, mint például a visszafelé következtetés, a szakaszos ábrázolás vagy mérleg készítése. A szöveges feladatok többségét a hétköznapi életből vett feladatok, problémaszituációk alkotják, kivételt képeznek az olyan feladatok, amelyben a „Melyik az a szám..” bevezetést egy olyan feladat követi, amelyet a visszafelé következtetés módszerével oldunk meg. A becslésekkel és mennyiségi összehasonlításokkal kapcsolatos feladatok 20%-os részaránya az 5. évfolyamon teljesen indokolt, ugyanis ebben az életkorban szükséges fejleszteni azokat a készségeket, amelyek a mennyiségek összehasonlításával, a mennyiségi viszonyok aritmetikai felírásával kapcsolatosak. A mennyiségek közötti hozzárendelések az egyenes és fordított arányosság tanulmányozása során jelennek meg, szintén gyakorlati, hétköznapi életből vett feladatok formájában, több esetben grafikonok készítése is szükséges. Ez hatékony alapot jelenthet a nagyobb évfolyamokon történő függvényfogalom kialakításában, valamint az algebra függvénytani alapokra helyezett bevezetésében. Az ilyen típusú feladatok 16%-os részarányát teljesen megfelelőnek tartjuk. A változó fogalmával kapcsolatos feladatok még ezen az évfolyamon hiányoznak. Összességében tekintve az egyes feladattípusok részaránya megfelelő, az említett fejezetekben szereplő témakörök és feladatok tárgyalása hozzájárul az aritmetikai ismeretek megerősítéséhez és az operacionális gondolkodás további fejlesztéséhez.

A 6. osztályos tankönyvekben szereplő feladatok megoszlását a 2. sz. táblázat tartalmazza.

	M.T.	E.	Q.	F.	V.
H.É. (A.Á.)	32%	13%	12%	13%	6%
Mat. (A.Á.)	13%	2%	2%	1%	0
H.É. (M.Á.)	1%	0	0	1%	0
Mat. (M.Á.)	1%	0	0	3%	0
Összesen	47 %	15 %	14 %	18 %	6 %

2. táblázat: A 6. osztályos tankönyvekben szereplő feladatok megoszlása
Forrás: saját szerkesztés

Az arányosság és százalékszámítás ezen az évfolyamon viszonylag új tananyagnak minősül. Ebben az egyedüli kivételt az egyenes arányossággal kapcsolatos feladatok jelentik, amelyek az 5. évfolyamon is előfordulnak a mennyiségek közötti összefüggések tanulmányozása során. Az új fogalmak gyakorlása elég sok számolási feladatot feltételez, leginkább ezzel magyarázható a műveletek tulajdonságaival kapcsolatos (M.T.-vel jelzett) feladatok magas részaránya. A „Szabályok, megfeleltetések" című leckénél megjelennek a függvénytani összefüggésekkel kapcsolatos feladatok, illetve a mennyiségek közötti összefüggések felírása, a hozzárendelési utasítás helyett itt még a megfeleltetési szabály elnevezés jelenik meg. A változókat a megoldott feladatok esetében egyes helyeken különböző rajzolt szimbólumokkal (négyzet, háromszög, francia kártyából vett jelek) jelölik. Más feladatoknál viszont már megjelenik a változók x, illetve y szimbólumokkal történő bevezetése, a megoldások során ezekkel a szimbólumokkal többnyire a grafikonok koordinátáit azonosítják. A változó, illetve függvény fogalma még nem kerül említésre, ezen az évfolyamon ezt teljesen indokoltnak tartjuk. A tipikusan matematikai feladatok részaránya csak 24%, ez tovább hangsúlyozza a tankönyv gyakorlatorientált jellegét. Az általánosításokkal, általános következtetések megfogalmazásával kapcsolatos feladatok részaránya alacsony, a kérdések döntő többsége a feladatok konkrét megoldására irányul. A „Nyitott mondatok" témakör esetében olyan feladatok megoldása szerepel, amelyek algebrai modellje az $Ax + B = C$ típusú egyenlet. A megoldott feladatoknál szerepelnek olyan tipikusan aritmetikai módszerek, mint például a visszafelé következtetés, szakaszos ábrázolás, sőt még a próbálgatással történő megoldás is. Egyes feladatok megoldása során megjelenik a nyitott mondatok felírása, ahol az ismeretlent különböző rajzokkal (pénztárca, kalap, stb.) jelölik, az adott problémaszituációban szereplő mennyiséget szemléltetve. A nyitott mondatok megoldása lebontogatással történik. A nyitott mondatok ilyenszerű bevezetése a későbbi évfolyamokon ismertetett algebrai kifejezések előfutárának tekinthető. Ennek ellenére egyes feladatok esetében kissé erőltetettnek tűnik, mivel a feladatok aritmetikai számításokkal viszonylag könnyen megoldhatók és a nyitott mondat felírása inkább a konkrét megoldási folyamatot bonyolítja.

A 7. évfolyamon szereplő feladatok kategóriánként való megoszlását a 3. sz. táblázat tartalmazza.

	M.T.	E.	Q.	F.	V.
H.É. (A.Á.)	23%	7%	5%	4%	3%
Mat. (A.Á.)	14%	11%	3%	4%	9%
H.É. (M.Á.)	2%	2%	0	1%	2%
Mat. (M.Á.)	3%	2%	0	1%	4%
Összesen	42%	22%	8%	10%	18%

3. táblázat: A 7. osztályos tankönyvekben szereplő feladatok megoszlása
Forrás: saját szerkesztés

Ezeknek a feladatoknak az 51%-a tipikusan matematikai jellegű, ez leginkább az absztrakt matematikai fogalmaknak (mint például a változók), valamint az algebrai kifejezésekkel végzett műveleteknek tulajdonítható. Az általánosítási készségeket fejlesztő, illetve az általános következtetések megfogalmazását igénylő feladatok részaránya is 17%-ra növekedett. Továbbra is nagy részarányban vannak jelen a műveletvégzéssel, illetve a műveleti tulajdonságok ismeretével kapcsolatos feladatok, amelyek mellett a változókkal és az egyenlőségjel értelmezésével kapcsolatos feladatok kapnak hangsúlyos szerepet. A változók bevezetésének kezdetén néhány feladatban a változók még konkrét tárgyak kezdőbetűjét jelentik, egyes esetekben kifejezetten erőltetett formában (például az Ezeregyéjszaka meséit $1011ém$ alakban jelölik). Ez a későbbiekben hátrányt jelenthet a változók általános kiterjesztése esetén, amikor a változót bármely számadattal kifejezhető mennyiségek jelölésére alkalmazzuk. Az egyenleteket kezdetben lebontogatással és próbálgatással oldják meg. Itt főként az aritmetikai módszerekkel is megoldható feladatok szerepelnek, de megjelenik néhány tipikusan algebrai feladat is, amelyet próbálgatással oldanak meg. A mérlegelv bemutatása után, minden átmenet nélkül, megjelennek az olyan szöveges feladatok, amelyek algebrai modellje az $Ax + B = Cx + D$ típusú egyenletek. Ezeknek a feladatoknak a megoldása tipikusan algebrai gondolatmenetet követel, vagyis megoldásuk során szükség van az általunk említett strukturális gondolkodásra. A fejezeten belül az ilyen típusú feladatok részaránya 45%, amely kifejezetten magasnak tekinthető. Ez nagy nehézséget okozhat a közepes vagy gyengébb képességű tanulók számára, mivel hiányoznak a strukturális gondolkodásra való áttérést előkészítő tananyagi elemek és feladatok. Véleményünk szerint ebben a fázisban lenne szükség a szöveges feladatok függvénytani alapon való megközelítésére. Viszont a tankönyv a hozzárendelésekkel és függvényekkel kapcsolatos ismereteket ezen az évfolyamon jóval később, egy másik fejezet keretében mutatja be. Továbbá a függvénytani ismeretek bemutatása teljesen más vonalon, az algebrai ismeretektől elkülönítve valósul meg, a két tananyag között nagyon kevés kapcsolat fedezhető fel. Ilyen módon a függvénytani ismeretek nem járulhatnak hozzá a strukturális gondolkodás kialakításához és az algebrai ismeretek megalapozásához.

A nyolcadik osztályos tankönyvekben az általunk tanulmányozott fejezetekben jelentősen csökkent a konkrét számolásokkal és műveleti tulajdonságokkal kapcsolatos feladatok részaránya (18%, lásd a 4. sz. táblázatot). A legnagyobb részarányban az egyenlőségjel értelmezésével, illetve a függvénytani ismeretekkel kapcsolatos feladatok vannak jelen (37%, illetve 24%). Az egyenletek megoldási módszereinek emlékeztető áttekintése után kerül sor a szöveges feladatok megoldására. A tantervi követelményeknek megfelelően a szöveges feladatok típusokba vannak sorolva, nevezetesen szerepelnek helyiértékes írásmóddal, munkával, keveréssel, mozgással, életkorokkal, geometriai számításokkal kapcsolatos feladatok. A feladatok jellegéből kifolyólag 74%-os részarányban szerepelnek olyan feladatok, amelyek algebrai modellje egy $Ax + B = C$ típusú egyenlet. Amint említettük, az ilyen egyenletekkel megoldható szöveges feladatok főként operacionális gondolkodást igényelnek, így kevesebb lehetőség jut a strukturális gondolkodás további fejlesztésére az $Ax + B = Cx + D$ modellezésű, tipikusan algebrai feladatok megoldásával. A függvényekkel kapcsolatos ismeretek bemutatása ezen az évfolyamon is egy későbbi fejezetben történik, ahol az egyenes és fordított arányossággal, valamint a lineáris függvényekkel kapcsolatos ismeretek kerülnek előtérbe. A fejezet érdekessége, hogy olyan gyakorlati élettel kapcsolatos feladatok is szerepelnek benne, amelyek kiemelt jelentőségűek lehetnek a strukturális gondolkodás megalapozásában. Ezért is szükségesnek érezzük ennek a fejezetnek és az algebrai ismeretekkel kapcsolatos fejezetnek a közelítését. Ezen az évfolyamon is az összes feladatnak több mint a fele tipikusan matematikai feladatnak számít, amelyet teljesen megfelelőnek tartunk. Az általánosítási és a magasabb szintű elvonatkoztatási készségeket fejlesztő feladatok részaránya is magasabb, mint az előző évfolyamok esetében.

	M.T.	E.	Q.	F.	V.
H.É. (A.Á.)	9%	18%	4%	15%	1%
Mat. (A.Á.)	7%	17%	1%	4%	11%
H.É. (M.Á.)	0	0	0	0	0
Mat. (M.Á.)	2%	2%	0	5%	4%
Összesen	18%	37%	5%	24%	16%

4. táblázat: A 8. osztályos tankönyvekben szereplő feladatok megoszlása
Forrás: saját szerkesztés

Összegzés

Az algebra oktatásának területén a hazai tantervek a főbb nemzetközi irányvonalakat követik. Az ötödik és hatodik évfolyamon az aritmetikai módszerek dominálnak. Ennek keretében kerül sor az egész számokkal és törtszámokkal végzett műveletek összefoglalására, valamint az arányosság és százalékszámítás megismerésére. Megjelennek a nyitott mondatok, illetve az ezekhez kapcsolódó szöveges feladatok. Előtérbe kerülnek a tipikusan aritmetikai módszerek, mint például a visszafelé következtetés, a szakaszos ábrázolás, vagy a mérleg használata. A hetedik évfolyamon megjelennek az algebrai kifejezésekkel végzett műveletek, valamint az egyenletek megoldása lebontogatással, illetve mérlegelvvel. Közvetlenül utána kerül sor az olyan szöveges feladatok bevezetésére, amelyek az $A \cdot x + B = C \cdot x + D$ típusú egyenlettel modellezhetők. Ezeknek a feladatoknak a megoldása során szükség van az általunk már említett *strukturális gondolkodásra*. Ennek a megalapozása és fejlesztése valójában teljesen kimarad, mivel az egyenletek megoldásáig csak az aritmetikai számítások és a műveleti tulajdonságok ismertetése történik, amelyhez az *operacionális (procedurális) gondolkodásra* van szükség. A függvény fogalmának megismerése csak egy későbbi fejezetben történik, pedig a függvénytani alapokra helyezett matematikaoktatás egyik legfőbb követelménye a két fejezet (az algebrai kifejezések és a függvények) oktatásának összekapcsolása. Nyolcadik évfolyamon az algebrai kifejezések tanításával párhuzamosan a szöveges feladatok megoldása túlnyomóan típusfeladatokra (keveréses feladatok, mozgással és munkavégzéssel kapcsolatos feladatok, helyiértékes írásmóddal kapcsolatos feladatok) korlátozódik. A függvények tanítása, rendszerezése ezen az évfolyamon is az algebrai kifejezésektől elkülönítve történik, pedig itt is szükség lenne a két fejezet összekapcsolására a strukturális gondolkodás további fejlesztése céljából. A strukturális gondolkodás megalapozását és fejlődését szolgáló $Ax + B = Cx + D$ algebrai egyenletekkel modellezhető szöveges feladatok részaránya jóval magasabb a 7. évfolyamon (45%, szemben a 8. évfolyamon lévő 26%-kal). Ezt azért nem tartjuk megfelelőnek, mivel a 7. évfolyamon a strukturális gondolkodás megalapozása, míg a 8. évfolyamon ennek a fejlesztése és elmélyítése történik, ezért ezeknek a feladatoknak a helyes részarányát ennek figyelembe vételével szükséges kialakítani. Továbbá, a 7. évfolyamon az említett feladatok bevezetése közvetlenül a tipikusan aritmetikai módszerrel megoldható (operacionális gondolkodást igénylő) feladatok után történik, minden különösebb előkészítés nélkül. Így az átmenet az operacionális gondolkodásról a strukturális gondolkodásra gyakorlatilag egyik tanóráról a másikra kell megvalósuljon. A problémát áthidaló javaslatunk, a mérlegelv bevezetésével párhuzamosan, a szöveges feladatoknak egy függvénytani alapokra helyezett megközelítése. Ennek során történne a strukturális gondolkodás megalapozása, ahol a tanulók konkrét számadatokkal történő manipulációval, értéktáblázatoknak és függvények grafikonjának elkészítésével átlátnák a feladat szerkezetét, amely alapvető jelentőségű a szöveges feladatok $Ax + B = Cx + D$ típusú egyenletekkel való megoldása során.

Irodalom

Biggs, J. B.–Collis, K. F. 1982. Evaluating the quality of learning. The SOLO taxonomy. New York: Academic Press.

Boulton-Lewis, G.–Pillay, H.–Wilss, L. 1998. Sequential developement of algebra knowledge: a cognitive analysis. *Mathematics Education Research Journal.* 10/2.

Filloy, E.–Rojano, T. 1989. Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*. 9(2).

Fülöp Zs. 2016. Regula falsi in lower secondary school education. Teaching Mathematics and Computer Science. 14/2.

Fülöp Zs. 2020. Regula falsi in lower secondary school education II. Teaching Mathematics and Computer Science. 18/2.

Fülöp Zs. 2023. The functional approach to algebra: the development of structural thinking in lower secondary school education. In: Ambrus, G.; Sjuts, J.; Vásárhelyi, É.: Mathematik und mathematisches Denken : Ansprüche und Anforderungen vor, in und nach der Schule. Münster.

Herscovics, N.–Linchevski, L. 1994. A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*. 27.

Kaput, J. J. 2008. What is algebra? What is algebraic reasoning? In: Kaput, J. J.–Carraher, D. W.–Blanton, M. L. (eds.): *Algebra in the early grades*. New York.

Kieran, C. 1997. Mathematical concepts at the secondary school level: The learning of algebra and functions. *Learning and teaching mathematics: An International Perspective*. Psychology Press.

Küchemann, D. 1981. Algebra. *Children's Understanding of Mathematics*. 11–16.

Leitzel, J. R. 1989. Critical considerations for the future of algebraic instruction. *Research issues in the learning and teaching of algebra.*

Paróczay E.–Tamás B.–Wintsche G. 2020. *Matematika Tankönyv*. Budapest: Oktatási Hivatal.

Stacey, K.–MacGregor, M. 1997. Ideas about symbolism that students bring to algebra. *The Mathematics Teacher*. 90(2).

Stacey, K.–MacGregor, M. 2000. Learning the algebraic methods of solving problems. *Journal of Mathematical Behavior*. 18.

Yerushalmy, M. 2000. Problem solving strategies, A longitudinal view on problem solving in a function based approach to algebra. *Educational Studies in Mathematics*. 43.