A kombinatorika módszertanáról a tanító- és óvodapedagógus-képzésben

Kórus Péter
Szegedi Tudományegyetem Juhász Gyula Pedagógusképző Kar, Szeged

1. Bevezetés

Tanulmányomban az SZTE JGYPK Alkalmazott Pedagógiai Intézetében folyó matematikakurzusok közül azokról beszélek, amelyeken a kombinatorika témakör jelentős mértékben megjelenik. A tanító szakos hallgatókkal az alapképzésben, az 1. félévben oldunk meg egyszerűbb kombinatorikai példákat, melyek során különböző megoldási módszerekkel ismerkednek meg. Azon tanító szakosok, akik a matematikát választják műveltségi területüknek, a 2. évfolyamon újra találkoznak kombinatorikával. Ekkor már részletesebben foglalkozunk a témával, több példán keresztül, valamint általános kiszámítási módokkal, azok bizonyításaival ismerkednek meg a tanulók. A tanító szakosok mellett az óvodapedagógus szakos hallgatókkal is foglalkozunk kombinatorikai problémákkal, ezt többnyire a logikai készlet segítségével tesszük, játékosan, interaktív módon.

2. Tanító szak, alapképzés

A tanító szakosok első félévükben a heti három órás *Matematika I.* kurzuson ismerkednek meg a szükséges matematikai alapokkal (az oktatók rendszerint Krisztin Német István és Kórus Péter). Ez a kurzus az utóbbi években számos változtatáson esett át (Kórus 2017; Krisztin Német 2017), mindazonáltal, az alapvető célok, szempontok, elvárások a kurzus kapcsán nem változtak. A kurzus célja nem az, hogy olyan ismereteket szerezzenek a tanulók, amik számukra esetleg akadémikusnak vagy haszontalannak tűnhetnek, hanem olyanokat, amiket később biztosan hasznosítani fognak tanítási munkájuk során. Az órákon feldolgozott témakörökkel természetesen már találkoztak korábbi tanulmányaik során az iskolában, azaz egyfajta ismétlésnek is felfogható számukra a tananyag elsajátítása. Annyiban más a helyzetük az egyetemen, hogy míg az iskolában diákként nem feltétlenül volt az elvárás, hogy egy adott feladat megoldásánál pontos definíció megadása is kellhet, addig az egyetemi órákon ez elvárás több feladat esetén is; illetve itt a precizitás, a követhető feladatmegoldás, a pontos magyarázat is lényegesen hangsúlyosabb. Úgy gondolom, hogy általános szemlélet szerint, a fogalmak pontos ismerete és használata elengedhetetlen pedagógushallgatók esetén. A pontos magyarázat adása azáltal még hangsúlyosabb, hogy nem képletek minduntalan használatát várjuk az órákon, hanem hogy gondolkodással jöjjünk rá az adott megoldásra, azaz szakadjunk el a középiskolában jól megszokott „mindenre van egy képlet, abba beírjuk a számokat, és kijön a megoldás” felfogástól. Az alsóban tanító pedagógusok csak képletek használatával nyilvánvalóan nem boldogulnának a tanítás során.

A tantárgy témakörei a következők: összeszámlálási (kombinatorikai) példák, geometria, függvényekkel, ill. természetes számokkal kapcsolatos feladatok, fogalmak, állítások. A kurzushoz egy 9 oldalas elektronikus jegyzetet adunk ki a hallgatóknak, melyet kinyomtatva, illetve elektronikusan olvasva használunk az órákon. Ezen tananyag tartalmazza a megoldandó feladatok mellett a szükséges elméleti összefoglalót is, ami igen hasznosnak bizonyult az órákon, továbbá az otthoni készülést is segíti. A kombinatorikai részhez csak feladatok tartoznak, mivel itt nem elvárás, hogy valaki ismerje a különböző kombinatorikai fogalmakat név szerint, mint például *ismétlés nélküli kombinációk*. Ezzel a résszel, azaz az összeszámlálási feladatokkal két-három héten keresztül foglalkozunk (ezen idő mennyisége függ a gyakorlat vezetőjétől, a dolgozatok számától, az elmaradó órák számától). A példák összeállításánál fontos szempontok voltak a következők: elemi megoldást lehessen rájuk adni, változatosak legyenek, érintsenek több témakört is, gyakorlatiasak legyenek. Három főbb részre bonthatjuk az itteni feladatokat: eset-összeszámlálási példák, geometriai példák, illetve kockadobásos példák.

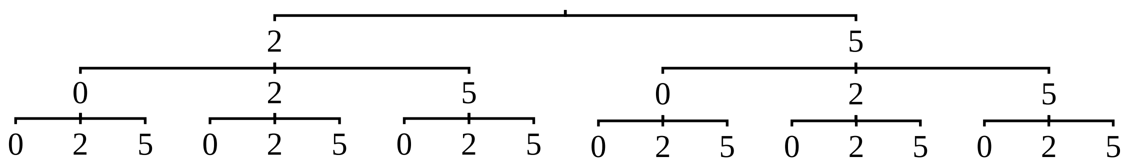
2.1. Eset-összeszámlálási példák

Bevezetésként a

- *Hányféle háromjegyű szám alkotható a 0, 2, 5 számjegyekből?*

feladattal szoktuk kezdeni a félévet. Ez a feladat igen tanulságos, mert többféleképpen is megoldható, és jól megmutathatók a példán keresztül a különböző megoldási módszerek. A hallgatóktól középiskolás éveik után nem várható, hogy első gondolatuk legyen a felsorolás vagy az ágrajzos megoldás, azaz ez egy jó ráhangolódás alsós módszerek használatára.

- A feladat megoldása felsorolással: a hibázási lehetőségek minimalizálása céljából logikus a számokat nagyság szerint például növekvő sorrendben felsorolni (ez sem nyilvánvaló mindenkinek!), és akkor megkapjuk a 18 lehetséges számot: 200, 202, 205, 220, 222, 225, 250, 252, 255, 500, 502, 505, 520, 522, 525, 550, 552, 555.
- A feladat megoldása ágrajzzal:



  Az ágrajz első sora tartalmazza a két lehetséges százas helyiértéken álló számjegyet, míg a második és a harmadik sorban a lehetséges tízes, illetve egyes helyiértéken álló számjegyek szerepelnek. Így függőlegesen kiolvasva megkapjuk a 18 lehetséges háromjegyű számot. Ezen szemléletes megoldás lényegében magában foglalja a felsorolást is, hiszen a fentebb felsorolt számok jelennek meg itt is (balról jobbra haladva), csak nem írtuk fel a számokat konkrétan.
- Végül a feladat megoldása helyiértékes, szorzásos módszerrel: ábrázoljuk a lehetséges számokat helyiértékesen: _ _ _. Ekkor az első helyre 2-féle jegy kerülhet (2 vagy 5), a második helyre 3-féle (0, 2 vagy 5), és a harmadik helyre is 3-féle (0, 2 vagy 5). Ez $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ számot jelent, mivel mindegyik első jegyhez mindegyik második jegy és mindegyik harmadik jegy társítható, és három így kiválasztott jegy megad egy megfelelő háromjegyű számot. A hallgatókhoz legközelebb ez a megoldás áll többnyire, hiszen ezt a módszert alkalmazták legtöbbször a középiskolában, azaz ez a legfrissebb emlékű módszer. Azonban, sokszor hajlamosak elfelejteni, hogy az általam indoklásként adott utolsó tagmondat fontos, hiszen az alapján szorzunk, és nem például összeadunk. Ez a módszer tulajdonképpen az ágrajzos megoldás ágrajz nélküli változata, ekkor nem kell annyit rajzolni.

A számos gondolkodtató példa közül kiemelném még a

- *Hányféleképpen lehet négyféle ízű fagylaltból háromgombócosat venni, ha*
  a) a gombócok mind különböző ízűek, és a tölcsér miatt a sorrend is számít;
  b) a gombócok közt lehetnek azonos ízűek is, és a sorrend továbbra is számít;
  c) a gombócok mind különböző ízűek, és a kehely miatt a sorrend nem számít;
  d) a gombócok közt lehetnek azonos ízűek is, és a sorrend nem számít?

feladatot, mert itt többféle kombinatorikai meggondolás is megjelenik. Az első két rész megoldható az előbb említett mindhárom módon: felsorolással, ágrajzzal és a helyiértékes szorzásos módszerrel is (egyébként ez egy-egy példa az ismétlés nélküli variációkra és az ismétléses variációkra, számuk $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ ill. $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$). A c) rész kicsit érdekesebb, felsorolással szoktuk megoldani (1, 2, 3, 4 ízjelöléssel 123, 124, 134, 234 a lehetséges esetek), itt nehezebb kombinatorikus megoldást adni, igaz, sokszor így próbálják a tanulók megoldani, így végül azt is megmutatom nekik ($\frac{4\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot1} = 4$), de inkább a felsorolást javasolom (ez a rész ismétlés nélküli kombinációkra példa). A d) rész a c) résznél kicsit nehezebb, kombinatorikus megoldást nem könnyű rá adni (ismétléses kombinációk lévén), itt már csak a felsorolással gondolkozunk (1, 2, 3, 4 ízjelöléssel 20 eset van: 123, 124, 134, 234, 111, 112, 113, 114, 221, 222, 223, 224, 331, 332, 333, 334, 441, 442, 443, 444). A d) részben használjuk a c) rész eredményét is, ami külön érdekessége a feladatnak.

2.2. Geometriai példák

Az általános eset-összeszámlálási példák után egyszerű geometriai hátterű számlálásos problémákat oldunk meg. Ilyenek például az

- *Adott egy síkon 2 (ill. 3, 4, 5, 6) pont. Hány egyenest határoznak meg, ha semelyik három adott pont nincs egy egyenesben, és minden egyenesnek két adott ponton át kell mennie?*
- *Adott egy síkon 1 (ill. 2, 3, 4, 5, 6) egyenes. Hány metszéspont van, ill. hány részre osztja(ák) a síkot, ha az adott egyenesek közt nincsenek párhuzamosok, és nincs olyan pont, amire legalább három adott egyenes illeszkedik?*

feladatok. Ezekben olyan fogalmakat kell ismerni, mint a *pont*, *egyenes* (alapfogalmak), *metszéspont*, *síkrész*, *párhuzamos*. Ezen fogalmakkal természetesen már találkoztak a hallgatók korábban, felelevenítésnek hasznos ezt az egyetemen is megtenni. Továbbá, a későbbi geometriai feladatok esetén precízen, részletesen tárgyaljuk a szükséges fogalmakat, amiket az általunk kiadott elméleti összefoglaló is tartalmaz. Az iménti kombinatorikai példák annyiban alsósoknak szánt feladatok, hogy lerajzolhatók és a keletkező egyenesek, illetve metszéspontok, síkrészek megszámlálhatók. Annyiban kicsit előremutatóbb példák, hogy általános kérdést is felvetnek, azaz hány keletkező egyenes (illetve metszéspont, síkrész) jönne létre, ha tetszőleges számú pont (illetve egyenes) lenne (idő függvényében meg is szoktam mutatni az általános meggondolást is). Ez a kérdéskör már inkább felsősöknek (vagy középiskolásoknak) szóló probléma lehet, hiszen nevezetes kombinatorikai fogalmat használva (kombinációk) vagy teljes indukcióval megadhatók az előbbi kérdésekre a válaszok. Azt gondolom, nem árt, ha egy kicsit távlati célt is nyitunk ilyen feladatok által, hogy egyrészt a hallgatók ne érezzék azt, hogy minden olyan egyszerű, másrészt lássák, hogy egy egyszerű feladatból hogyan lehet nehezebbet készíteni.

2.3. Kockadobásos példák

Klasszikus valószínűségszámítási példáknak számítanak a kockák feldobásakor feltett kérdések. Habár pontos valószínűségi fogalmakat nem definiálunk ezen kurzuson, – lévén az alsós matematikaoktatásban a valószínűség fogalma nem jelenik meg pontosan –, azonban egy kis „esélylatolgatás" a kombinatorika témakörében érdekes lehet. Két ilyen példa a következő:

- *Egy szabályos dobókockával dobunk egyszer. Hányféle eredmény lehetséges? Az egyes eredmények hányféleképpen következhetnek be? Ezek alapján becsüljük meg, 100 dobásból hányszor lesz 2, 4, illetve 6 az eredmény? Dobjunk 100-szor, és számoljuk meg, hányszor lett 2, 4, illetve 6 az eredmény! „Elméletileg" mennyi az „esélye", hogy az eredmény 2, 4, illetve 6?*
- *Válaszoljuk meg az előző feladat kérdéseit akkor is, ha két különböző szabályos dobókockával dobunk egyszer, majd a dobott számokat a) összeadjuk b) összeszorozzuk.*

A fenti kísérletet meg is valósítjuk: mindenki (a tanárral együtt) feldob 1 (illetve 2) kockát sokszor, azután összeszámoljuk a megfelelő esemény bekövetkezéseinek gyakoriságát, majd meghatározzuk a relatív gyakoriságát is. A tanulók rendszerint nagyon élvezik, hogy a kockákat feldobva fizikailag is lejátszunk egy-egy kísérletet, sőt, néha ők mondják, hogy próbáljunk meg valamilyen érdekesebb eseményt kitalálni, és azt megszámolni, hányszor következik az be. Mivel az elméleti esély kiszámítása után szinte mindig azt tapasztaljuk, hogy a relatív gyakoriság és az elméleti valószínűség nagyon hasonló számot (százalékot) ad, ez a rész kicsit erősítheti bennünk a matematika és a valóság kapcsolatát, azaz mutatja, hogy az elméleti matematikai számolások nem öncélúak, hanem a valóságot modellezik.

3. Tanító szak, matematika műveltségterület

A matematika műveltségterületes hallgatók a 3. félévben, a heti négy órás *A matematika alapjai* kurzus felén, heti két tanórában foglalkoznak kombinatorikával és valószínűséggel (ez a témakör korábban, 2018-ig önálló kurzusként szerepelt *Kombinatorika és valószínűségszámítás* címmel). A tantárgy anyagának feldolgozását egy előre kiadott, elektronikus jegyzet segíti. A jegyzet 11 oldalas, tartalmazza az érintett témákbeli fogalmakat, összeszámlálási képleteket, kapcsolódó feladatokat. A témakörök: skatulyaelv, permutációk, variációk, kombinációk, vegyes feladatok, valószínűségi kísérletek, tapasztalati valószínűség, klasszikus és geometriai valószínűségi mezők, valószínűségi paradoxonok. A fogalmak és feladatok összeállításánál a *Sokszínű matematika* tankönyvek és feladatgyűjtemények szolgáltak alapul (Árki et al. 2009; Csordás et al. 2008; Kosztolányi et al. 2009).

Természetesen, a valószínűségszámításban sokszor kell alkalmazni kombinatorikai összeszámlálási módokat, de ezen témakört most nem tárgyaljuk, csak a „tisztán” kombinatorika részt.

3.1. Skatulyaelv

A skatulyaelvet legtöbbször bizonyítást igénylő feladatok esetén használjuk, például:

- *Egy iskolába 618 gyerek iratkozott be szeptemberben. Mutasd meg, hogy van*
  a) legalább két tanuló, akik az év ugyanazon a napján születtek;
  b) legalább 12 tanuló, akik az év ugyanazon hetében látták meg a napvilágot.
  c) Minimálisan hány gyereknek kellene az iskolába járni, hogy mindkét állítás teljesüljön?

Az elv előnye meglátásom szerint az, hogy ha valaki megérti a lényegét, akkor kiderül, hogy szinte mindig ugyanúgy kell gondolkodni, nem kellenek nagy ötletek a megoldások megadásához. A hátránya talán az, hogy bizonyításban kell gondolkodni. Gyakran akad olyan hallgató, akivel hiába oldunk meg akár 10-15 ilyen feladatot, mégis azt tapasztalom számonkéréskor, hogy nem tud reprodukálni skatulyaelves megoldást. Ez azért lehet, mert vezetés, segítség nélkül a tanulók nehezebben tudnak bizonyítást adni, szokatlanabb lehet ez a fajta gondolkodási mód. Ilyenkor minél egyszerűbb példákat szoktam feladni, hogy a módszer lényege érthető legyen, ha esetleg nehezebb példa megoldása nem menne. A diszkrét feladatokon túl geometriai problémákat is meg szoktunk oldani:

- *Adott egy 2 egység oldalú négyzet. El lehet-e helyezni a négyzet belsejében vagy határán 9 pontot úgy, hogy bármely két pont távolsága legalább 1 legyen? Mi a válasz 10 pont esetén?*

3.2. Permutációk

A nevezetes kombinatorikai fogalmak közül a sorbarendezések számának meghatározásakor többnyire a permutációk számának képletét használjuk. A permutációk lehetnek ismétlés nélküliek illetve ismétlésesek (valamint ciklikus permutációkról is beszélhetünk). A számukra vonatkozó képleteket levezetjük órán, hogy jobban érthetők és megjegyezhetők legyenek. Az ismétléses permutációk esetén a képletet kicsit nehezíti az, hogy osztani is kell, ráadásul akár szorzattal, de magyarázatot adva nem szoktam tapasztalni sem megértésbeli, sem alkalmazásbeli problémát a hallgatók részéről. Az itteni példákkal szinte mindig mindenki könnyen megbirkózik. Egy átlagos nehézségű feladat a következő:

- *Hányféleképpen lehet sorba rendezni a következő szavak karaktereit?*

a) SZOMBATHELY b) SZEGED c) MAGYARORSZÁG

3.3. Variációk

Az ismétlés nélküli, illetve ismétléses variációk számának meghatározásának módját és az adódó képleteket is tárgyaljuk órán (ágrajzzal például kiválóan lehet szemléltetni az eseteket). A fogalom igen egyszerű, ennek megfelelően elmondható, hogy itt sem szokott különösebb gond lenni az anyagrész átadásával. Kihívásként nem csak nagyon egyszerű feladatokat szoktunk megoldani, hanem egy-egy nehezebb példára is sort kerítünk:

- *Hány olyan legfeljebb hatjegyű természetes szám van, melyben előfordul 1-es számjegy?*

3.4. Kombinációk

A kombinációk számának meghatározása összetettebb, mint az előző nevezetes fogalmak esetén. Egyrészt a számolásnál használjuk a már ismert képleteket, osztás is nehezíti a számolást, illetve több a jelölés is: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$. Természetesen, a tanulók ezt a témát is megismerték korábban az iskolában, tehát vannak emlékeik, de például az ismétléses kombinációk számára vonatkozó $\binom{n+k-1}{k}$ képletet nyilván nem tartják folyamatosan észben, azaz itt kicsit többet kell magyarázni és memorizálni is. Habár ez utóbbi képlet bizonyítása trükkös, nem könnyű, érdekességképpen megnézzük órán, hátha egy kis támpontot ad a megjegyzéshez. A kombinációk kapcsán megemlítjük még a Pascal-háromszöget és a binomiális tételt alkalmazásként. A szokásos „hányféleképpen választhatunk ki…” típusú feladatok mellett megoldunk például számológépet igénylő problémákat is, mint a következő:

- *Hány főt kell 13 emberből kiválasztani úgy, hogy a kiválasztást 715-féleképpen tudjuk megtenni? (A kiválasztásnál a sorrendet nem vesszük figyelembe.)*

Az iménti példa azon okból is tanulságos, hogy nem csak egy megoldás van, hanem kettő; elég a Pascal-háromszögre gondolni ($\binom{13}{4} = \binom{13}{9} = 715$).

3.5. Vegyes feladatok

A kombinatorikai fogalmak áttekintéseként szerepelnek vegyes feladatok jegyzetünkben. Ez a fejezet ugyan nem tartalmaz új dolgot, mégis lényegesen nehezebbnek mondható, hiszen nem mondjuk meg előre, hogy például variációkkal kapcsolatos az adott feladat, itt ömlesztve vannak a példák. Sőt, egy feladatban akár többféle fogalom használatára is szükség lehet:

- *Egy dobókockát feldobunk egymás után a) hatszor; b) hétszer.*
  Hány olyan eset van, amikor a dobott számok között van két egyenlő?

(Itt az a) részben ismétléses és ismétlés nélküli variációkat használva $6^6 - 6! = 45936$ eset adódik, míg a b) részben ismétléses variációkat tekintve és a skatulyaelvet alkalmazva $6^7 = 279936$ a végeredmény.)

4. Óvodapedagógus szak

Az óvodapedagógus szakosoknak a 3. félévükben a heti két órás *Matematika* kurzuson tartunk először matematikai kurzust az egyetemen (az oktatók rendszerint Pintér Klára és Kórus Péter). Itt először a logikai készlettel ismerkednek meg a hallgatók (természetesen sokan ismerik már ezt a játékot korábbról). A kurzus célja, hogy a leendő óvodapedagógusok rendelkezzenek a szükséges alapvető logikai, kombinatorikai kompetenciákkal, továbbá képesek legyenek megfelelő matematikai játékokat készíteni gyerekeknek, illetve értőn használni azokat. A tananyag elsajátításához segítségül szolgál a *Matematika I. (tantárgypedagógia) óvóképzős hallgatók számára* jegyzet (Pintér 2015).

A félév első felében a logikai készletet használjuk, mindenki hoz magával egy-egy ilyen készletet. Először megvizsgáljuk a készletet és kérdésekre válaszolunk. Hány elem van? Milyen tulajdonságok figyelhetők meg? Hogyan nevezünk meg egy elemet pontosan? Ágrajzokat készítünk a logikai készlet részrendszereihez. Az ágrajzok készítése segíti a rendszerben gondolkodást, vizuális ábrázolást, és a logikai készséget. A matematikai fejlesztést több alkalommal is játékosan tesszük, hiszen különféle barkochbákat játszunk (hagyományos, hazudós, fordított), mely játékokat gyakran kibővítjük azáltal, hogy meg kell például válaszolni, hogy hány lehetséges elem maradt egy adott kérdés után, vagy hány kérdést kell feltennünk ahhoz, hogy biztosan ki tudjuk találni a gondolt elemet. Az egyszerű barkochbáknál kicsit nehezebb játékokat is játszunk – egy példa egy feladatban összefoglalva:

- *A és B a logikai készlet elemeivel játszik: A gondol az egyik elemre, B egy elemet kiválasztva kérdez, mire A megmondja, hogy az elemnek hány közös tulajdonsága van az általa gondoltéval.*
  - *B: Nagy, zöld, lyukas négyzet? – A: 2.*
  - *B: Kicsi, piros, teli kör? – A: 1.*
  - *B: Nagy, sárga, teli négyzet? – A: 0.*

  Hogyan találhatja ki B, melyik elemre gondolt A?

A hallgatóktól a logikus gondolkodás mellett azt is elvárjuk, hogy le is tudják írni a gondolatmenetüket, azaz pontosan kell fogalmazniuk, értelmes mondatokat kell tudniuk alkotni. Úgy vélem, ez meg is valósul a gyakorlatban. A játékokon túl halmazokkal, logikai állításokkal is foglalkozunk, könnyebbektől a nehezebbekig, hogy kihívást is jelentsen a tanóra a hallgatóknak. Egy nehezebb példa a következő:

- *Hány olyan elem van a logikai készletben, melyre igaz a következő állítás: Ha kicsi, akkor négyzet.*

Az órákon felvetődő problémák mind természetesnek mondhatók, hiszen egy gyerek is feltehetné ugyanazokat a kérdéseket, amiket mi, legfeljebb nem a bonyolultabbakat. Természetesen, egy óvodapedagógusnak tudnia kell gondolkodtatóbb kérdéseket is feltennie és megválaszolnia.

A félév második felében különböző egyszerű kombinatorikai feladatokat oldunk meg, hasonlókat a tanító szakon tartott kurzus feladataihoz. Egyszerű, képleteket nem igénylő problémákról van szó, mint például a következők:

- *Hányféle karkötőt fűzhetünk 3 db piros és 4 db sárga gyöngyből? Az azonos színű gyöngyöket nem különböztetjük meg.*
- *Egy zsákban a logikai készlet elemei vannak. Hány darabot kell kivenni véletlenszerűen ahhoz, hogy a kihúzott elemek között biztosan legyen*
  a) zöld elem; b) zöld vagy kék elem; c) négyzet és háromszög is; d) két kicsi, teli elem?
- *Hányféleképpen lehet kiolvasni a neveket az alábbi betűtáblákból, ha csak jobbra és lefelé léphetsz?*

A	*D*	*R*	*I*	*E*	*K*	*I*	*T*	*T*	*I*	*N*	*I*	*K*		
D	*R*	*I*	*E*	*N*	*I*	*T*	*T*	*I*		*I*	*K*	*O*	*L*	*E*
R	*I*	*E*	*N*	*N*	*T*	*T*	*I*					*L*	*E*	*T*
					T	*I*						*E*	*T*	*T*
					I									

Az órákon történő interaktív játék és gondolkodás mellett különböző elkészített játékokkal is foglalkozunk. Korábbi hallgatók játékaiból mutatunk néhányat a tanulóknak, megbeszéljük a tulajdonságaikat, az esetleges játékvariációkat, illetve ki is próbáljuk azokat. A kurzus egyik elvárása, hogy a hallgatók készítsenek két – egy logikai készlet típusú és egy másik kombinatorikai – játékot, rövid leírással, amihez a korábbi játékok szolgálnak ötletül. Az így megvalósított játékokat a tanulók később használhatják akár munkájuk során, akár foglalkozásokon kívül. Amellett, hogy számos kiváló játékkal találkoztam eddigi kurzusaim során, a tanulók egymástól is több remek ötlettel gazdagodtak. Ezáltal, véleményem szerint, a tanórák egyúttal színeseknek és hasznosaknak is nevezhetők.

Irodalom

Árki T.–Konfárné Nagy K.–Kovács I.–Trembeczki Cs.–Urbán János 2009. *Sokszínű matematika – feladatgyűjtemény 9, 10, 11, 12*. Szeged: Mozaik Kiadó.

Csordás M.–Konfár L.–Pintér K.–Vincze I.–Kozmáné Jakab Á.–Kothencz Jánosné 2008. *Sokszínű matematika – tankönyv 5, 6, 7, 8*. Szeged: Mozaik Kiadó.

Kórus P. 2017. Matematika gyakorlatok első éves tanítóképzős hallgatóknak. In: Lőrincz I. (szerk.): *XX. Apáczai-napok Nemzetközi Tudományos Konferencia – Tanulmánykötet.* Győr: Széchenyi István Egyetem Apáczai Csere János Kar, 264–268.

Kosztolányi J.–Kovács I.–Pintér K.–Urbán J.–Vincze I. 2009. *Sokszínű matematika – gimnáziumi tankönyv 9, 10, 11, 12*. Szeged: Mozaik Kiadó.

Krisztin Német I. 2017. Az útkeresés folytatódik – A tanító szakos hallgatók alapképzésének Matematika előadása. In: Lőrincz I. (szerk.): *XX. Apáczai-napok Nemzetközi Tudományos Konferencia – Tanulmánykötet.* Győr: Széchenyi István Egyetem Apáczai Csere János Kar, 259–263.

Pintér K. 2015. *Matematika I. (tantárgypedagógia) óvóképzős hallgatók számára.* Szeged: Szegedi Tudományegyetem Juhász Gyula Pedagógusképző Kar. http://www.jgypk.hu/mentorhalo/tananyag/Matematika_I._tantrgypedaggia/index.html