Az útkeresés eredménye – A tanító szakos hallgatók alapképzésének megújult Matematika előadása

Krisztin Német István
Szegedi Tudományegyetem Juhász Gyula Pedagógusképző Kar, Szeged

1. Előzmények

A korábbi Apáczai-napokon több előadás hangzott el a tanítók alapképzése Matematika kurzusainak szegedi oktatásáról, az ezekkel kapcsolatos kísérletekről (Szalay 2008; Szalay 2009; Szalay 2010; Szalay 2011; Kórus 2017; Krisztin Német 2017; Krisztin Német 2018).

Úgy érezzük, az útkeresési folyamat mostanra eredményre vezetett: véleményünk szerint sikerült összeállítani egy, a céloknak és a lehetőségeknek megfelelő matematika tananyagot. Az anyag mostani formájának és tartalmának eléréséhez – a korábbi változatok oktatási- és vizsga-tapasztalatainak beépítése mellett – jelentősen hozzájárultak a gyakorlóiskola 1-4. osztályaiban 2015 és 2019 között végzett hospitálásokon, továbbá három általános iskolai tankönyvcsalád 1-6. osztályos könyveinek áttanulmányozása során szerzett tapasztalatok is (Árvainé 2009a; Árvainé 2009b; Árvainé 2009c; Árvainé 2009d; Csordás 2009; Csordás 2013; Kóródi 2015a; Kóródi 2014; Kóródi 2015b; Kóródi 2017; Tóthné 2016; Tóthné 2017; Kuruczné 2013; Esztergályos 2013; Balassa 2014; Balassa 2016; Csahóczi 2013a; Csahóczi 2013b).

Jelen írásunkban elsősorban a megújult előadásanyagról, a változtatásokról és ezek okairól, továbbá az elmúlt két tanév során szerzett oktatási- és vizsgatapasztalatokról számolunk be. Jelen írásunk szorosan kapcsolódik a fent említett publikációk közül az utolsó háromhoz (Kórus 2017; Krisztin Német 2017; Krisztin Német 2018), amelyek folytatásának tekintendő.

2. Bevezetés

A Matematika és a Matematika tantárgypedagógiája kurzusok hálóterve az alábbiak szerint alakul a Szegedi Tudományegyetem Juhász Gyula Pedagógusképző Kara Tanító BA alapképzésén a 2019-20 tanévtől:

1. félév: Matematika I. gyj. 0+3
   (Matematikai Praktikum ai. 0+2)
2. félév: Matematika II. gyj. 0+1
   Matematika tantárgypedagógia I. koll. 2+0
3. félév: Matematika II. koll. 1+0
   Matematika tantárgypedagógia II. gyj. 0+3
4. félév: Matematika tantárgypedagógia III. gyj. 0+3

Írásunk a 3. félévben sorra kerülő Matematika II. című, heti 1 órás előadásról szól. Az anyag összeállításakor a kezdetektől maximálisan igyekeztünk figyelembe venni a tanító szak sajátosságait, lehetőségeit. Az előadáson kizárólag az általános iskola alsó tagozatának matematika tananyagában szereplő szám-, reláció- és műveletfogalmak megalapozásával és felépítésével foglalkozunk. A tárgyalás „elméleti”, de „vázlatos”. Az „elméleti” jelző azt jelenti, hogy logikai, matematikai alapon foglalkozunk a fogalmakkal és tulajdonságaikkal; a „vázlatos” jelző pedig azt, hogy nem törekszünk teljességre sem terjedelemben, sem tudományosságban. A fogalmak „köznapi hátteréről” szót ejtünk az előadáson, de tantárgypedagógiai megközelítésükről nem, mivel ez külön kurzusok témája. De természetesen folyamatos az egyeztetés a tantárgypedagógiával.

Az idő rövidsége miatt több „alapozó” téma a gyakorlatokon kerül feldolgozásra. Ezért az előadás anyagához szorosan hozzátartozik a Matematika I. és II. gyakorlatok anyaga. Ezek az alábbiakat tartalmazzák:

Matematika I. gyakorlat: Összeszámlálás (példák)
Geometria (példák és elmélet)
Hozzárendelés (példák és elmélet)
Művelet – főleg „osztás”: többszörösség, osztás, maradékos osztás, maradékok (példák és kevés elmélet)
Egyenlet (példák és elmélet)

Matematika II. gyakorlat: Halmaz (példák és elmélet)
Logika (példák és elmélet)

A hallgatók a félévek elején elektronikus formában megkapják a feldolgozásra kerülő anyagot. A Matematika I., ill. II. gyakorlat dokumentuma jelenleg 9, ill. 4 oldal, aminek kb. fele példákat tartalmaz, másik fele elméletet. A Matematika II. előadás dokumentuma jelenleg 52 oldal, amiben már szerepelnek a legutóbbi megtartását követő változtatások is.

3. A Matematika II. előadás jelenlegi tartalma

Az anyag egy, a „szám”-ról szóló bevezetéssel, és egy rövid logikai előkészítéssel kezdődik. Majd – szintén röviden – a valós szám axiomatikus fogalma következik. Az anyag fő részét az alsó tagozat legfontosabb matematikai témája alkotja: a természetes szám fogalmának kialakítása, alaprelációival (egyenlő, kisebb, többszöröse) és alapműveleteivel (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) együtt, továbbá ezek fontosabb tulajdonságainak megállapítása. Tárgyaljuk még a természetes számok maradékos osztását, hatványát, tízes számrendszerbeli jelét, kerekítését és az ún. írásbeli alapműveletek eljárásait is. Foglalkozunk az érintett fogalmak számegyenesen való geometriai megjelenítésével is. Az anyag az egész számokkal zárul: az alsó tagozaton csak elkezdődik az egész számok vizsgálata, ezért ezzel a témával csak röviden foglalkozunk. Alsó tagozaton csak előkészítik a racionális szám fogalmát, ezért ezzel kapcsolatban csak természetes szám és geometriai alakzat törtrészének témáját tárgyaljuk.

3.1. A korábbiakhoz képest történt változások fő területei

- A felépítés axiomatikus alapjainak kibővítése
- Többféle alapú definíciók megalkotása a fogalmak többségére
- A tulajdonságok „általános” bizonyításának mellőzése
- A tulajdonságok tartalmát alsó tagozatos szinten „szemléltető” példák adása minden esetben
- Az „írásbeli” alapműveletek eljárásainak teljes részletezése (a tantárgypedagógia előadás mellett itt is szerepel)
- Az egész számok tárgyalásának teljes átalakítása
- A racionális számok teljes kihagyása
- A törtrész témájának részletes tárgyalása
- A számegyenes témájának kibővítése
- Megjegyzések az egyes témákhoz

3.2. Axiomatikus alapok, egész és racionális számok

Az előadás anyagának fontos eleme lett a valós számok alapfogalmairól és axiómáiról szóló fejezet. Egyedül a legösszetettebb axiómát, a Folytonossági (Teljességi) axiómát mellőztük. Egyrészt, mert túl bonyolult; másrészt, mert erre csak az irracionális számok tárgyalásához lenne szükség, amik nem szerepelnek az alsó tagozaton. Erről az axiómáról a matematika műveltségterületet választók Algebra kurzusában lesz szó, az ott szükséges szintig.

Az előadás első változatában, 2015-ben már szó volt a valós számokról. De utána egy időre elvetettük, mert „zavart” okozott a hallgatóknál. („Ha már minden megvan, miért kell újból felépíteni?") 2018-ban visszavettük e témát, két ok miatt is. Egyrészt, mert hasznos mint közoktatási összefoglalás: az axiómák megmutatják, hogy milyen számfogalomig jutunk el az érettségiig. Másrészt, szükség van rájuk megalapozásként, mert a közoktatásban végig ott van alapként a valós szám (axiomatikus) fogalma. Erről a tényről győztek meg az általános iskolai tankönyvek áttanulmányozásának tapasztalatai.

Az egész számokat az előadás első változatában természetes számok rendezett párjaként vezettük be. Szinte teljes volt a kudarc: még a legjobbak is alig értették e módszert. Utána előjel és természetes szám rendezett párjaként próbáltuk megalkotni az egész számokat. Ez a módszer már sikeresebb volt, de ez is okozott komoly gondot: nehézkes volt „korrekten" tárgyalni a nemnegatív egész számok és a természetes számok „azonosság"-át, vagyis azt, hogy pl. a +5 egész szám „ugyanaz", mint az 5 természetes szám. 2018-tól a valós számok alapján vezetjük be az egész számokat: olyan valós számokként, amik egyenlők egy természetes számmal vagy természetes szám ellentettjével. Az alsó tagozaton éppen csak elkezdődik az egész számok vizsgálata, ezért csak röviden foglalkozunk velük az előadáson: a fogalmuk mellett csak az egyenlőség és a kisebb relációjukkal, továbbá a számegyenesen való megjelenítésükkel foglalkozunk; a továbbiak a matematika műveltségterületen kerülnek sorra.

A racionális számok tárgyalásának esete is hasonlóan indult: több változatban is próbálkoztunk bevezetésükkel. De végül teljesen kihagytuk e témát. Az alsó tagozaton egyáltalán nem szerepelnek a racionális számok, vizsgálatuk csak az 5. osztályban kezdődik. Ezért csak a matematika műveltségterületen kerülnek elő, mégpedig olyan valós számként, ami egyenlő egész számok hányadosával. Természetesen a Matematika I. és II. gyakorlatokon előfordulnak egész és racionális számok is, több feladatban is; ezeknél a közoktatási alapokra építünk.

3.3. Többféle alapú definíciók

Az előadás jelenlegi anyagában végig nagy hangsúlyt fektetünk az egyes fogalmak többféle alapon történő megalkotására. Ezt a szemléletmódot a korábbiakban még nem éreztük ilyen fontosnak. A változást az általános iskolai tankönyvek áttanulmányozása és a hospitálások során szerzett tapasztalatok eredményezték: az oktatásban is többféle irányú megközelítés szerepel úgy a „szám" fogalmánál, mint a műveletek és a relációk fogalmainak többségénél. Emiatt, ha megfelelően akarjuk a hallgatókat felkészíteni, akkor a tanítóképzésben is többféleképpen kell megalkotnunk e fogalmakat.

A természetes szám fogalmát először háromféleképpen vezetjük be: a valós számok alapján, a Peano-axiómák alapján és a véges halmazok alapján. Ezekhez társul később még két geometriai bevezetés: a „számegyenes"-en pontokkal és szakaszokkal.

Természetes számok egyenlőségét kétféleképpen, a logikai azonosságra és a véges halmazokra lapozva vezetjük be; kisebb relációjukat pedig háromféleképpen, összegre (valós számos alap esetén), Peano-axiómákra és véges halmazokra alapozva is.

Természetes számok összege szintén háromféleképpen jelenik meg: valós számos alapon (ahol alapfogalom), a Peano-axiómákra és a véges halmazokra alapozva is. Különbségüket kétféleképpen alkotjuk meg: egyrészt az összeg alapján, ami az alsó tagozatos „pótlás" fogalomnak felel meg; másrészt a véges halmazok alapján, ami az alsó tagozatos „elvétel" fogalomnak felel meg.

Természetes számok szorzata négyféleképpen jelenik meg: valós számos alapon (ahol ez is alapfogalom), összeg alapon („ismételt összeadás"-ként), továbbá a véges halmazok alapján kétféleképpen is (unió, „párosítások"). A „párosítás" alapú bevezetést – ami persze matematikailag a Descartes-féle szorzat alkalmazása – csak megemlítjük az előadáson, mert ez „direkt formában" nem jelenik meg alsó tagozaton. De alapgondolata miatt fontos, mert sok kombinatorikai feladatban megjelenik majd.

Természetes számok többszörösségi (oszthatósági) relációját csak egyféleképpen, a szorzatra alapozva vezetjük be. Ennél szigorúan nem alkalmazzuk a „bennfoglalásos", „maradék nélküli" megközelítést.

A természetes számok hányadosa ötféleképpen jelenik meg: szorzat alapon („visszaszorzás"), összeg alapon kétféleképpen is („részekre osztás" és „bennfoglalás"), végül pedig az utóbbi kettő véges halmazok alapján is. Ez a témakör adta a legerősebb ösztönzést a többirányú megközelítés alkalmazásának következetes végig vitelére: a saját oktatási tapasztalatok, a hospitálások tapasztalatai és a tankönyvekben tapasztaltak is arra mutattak, hogy a „többféle osztás" gondot okoz a hallgatóknak és a tanulóknak is. Ezzel a módszerrel hangsúlyosan tudjuk megjeleníteni a tanítóképzésben, hogy a matematikában csak egyféle osztás van, aminek fogalmát a természetes számokon többféle alapon is be lehet vezetni. Ugyanez vonatkozik a kivonás esetére is: a „pótlás" és az „elvétel" nem két különböző művelet, hanem csak ugyanannak a matematikai fogalomnak kétféle megközelítési módja.

A maradékos osztás fogalmát csak egyféleképpen vezettük be, mégpedig egy szorzat-összeg-kisebb tulajdonságként.

Végül megjegyezzük még, hogy a szám fogalma mellett természetesen a relációk és műveletek fogalmait is megjelenítettük geometriailag a számegyenesen.

3.4. Bizonyítás, példa

Jelentős változás a korábbiakhoz képest, hogy egyetlen, „Minden"-nel kezdődő állítást sem bizonyítunk be az előadáson. Korábban volt néhány (kb. 10 db.) ilyen bizonyítás; pl. „Bármely a, b természetes számok esetén $a{\cdot}b=b{\cdot}a$". Két oka volt ezek elhagyásának. Egyrészt kellett az idő más, még fontosabb témáknak. Másrészt, ha bizonyítunk, akkor milyen alapon bizonyítsunk? Pl. az előbbi példa szorzattulajdonsága esetén: ha a valós számok az alap, akkor az egy axióma; ha az összeg vagy a véges halmazok az alap, különféle összeg-, illetve halmazműveleti tulajdonságokra kell hivatkozni. Tapasztalataink szerint a hallgatók többségének egyáltalán a bizonyítás szükségességének megértése is nehézséget okoz, hát még akkor a többféle alapú bizonyítás milyen problémát okozna. Természetesen állítások bizonyítása fontos téma, ezért szerepel is a matematika tanagyagban: a Matematika I-II. gyakorlatokon vannak ilyen feladatok, többségében oszthatósággal és maradékokkal kapcsolatosan.

Ha bizonyítások nem is, de konkrét számpéldák mindig kapcsolódnak az állításokhoz. E példákat nem csak az adott tulajdonság tartalmának „szemléltetése" miatt tárgyaljuk, hanem az adott tulajdonság „hasznát" is igyekszünk velük bemutatni.

Pl. az „$(a+b)+c=a+(b+c)$" tulajdonság esetén rámutatunk, hogy ezt az összeadások „könnyebb elvégzése érdekében" is használjuk: 8+5+2=(8+2)+5; persze itt a kommutativitást is felhasználjuk. Továbbá, a „tízesátlépés"-nél is ez van a háttérben: 8+5=8+(2+3)=(8+2)+3.

Vagy, az „$(a:b):c=(a:c):b=a:(b{\cdot}c)$" tulajdonság esetén kiemeljük, hogy ez többféleképen is megjelenik az oktatásban. „Hányadost úgy osztunk, hogy vagy az osztandót osztjuk, vagy az osztót szorozzuk.", „Ahányad részére változik az osztandó, vagy ahányszorosára változik az osztó, annyiad részére változik a hányados.", „Egymás után úgy osztunk, hogy egyrészt az osztók felcserélhetők, másrész a szorzatukkal osztunk." „Szorzattal úgy osztunk, hogy előbb az egyik tényezőjével osztunk, majd a kapott hányadost osztjuk a másik tényezővel." Itt felhívjuk a figyelmet, hogy ez a tulajdonság nagyon hasznos „fejszámolás"-nál, pl.: 112:14= =112:(2·7)=(112:2):7.

A példák természetesen nagy szerepet kapnak a definícióknál is: a különböző alapú definícióknál külön-külön bizonyítjuk, hogy pl. 2≠1, 3+2=5.

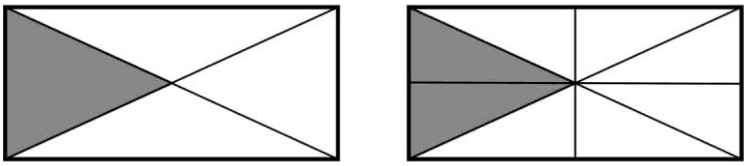
Végül megemlítjük, hogy „ha-akkor" típusú állítások esetében mindig külön figyelmet fordítunk megfordításukra is: ha az nem igaz, akkor ezt a tényt ott ellenpéldával igazoljuk is.

Pl. a „Bármely a, b, c természetes számok esetén, ha $a=b$, akkor $a \cdot c=b \cdot c$.” tulajdonság megfordítása nem igaz, mert pl. $2 \cdot 0=1 \cdot 0$, de $2 \neq 1$.

3.5. Természetes szám és geometriai alakzat törtrésze

Korábban említettük, hogy a racionális számok nem jelennek meg az előadás anyagában. Az ún. törtrész témáját viszont nagyon részletesen tárgyaljuk. Korábban ez nem így volt; úgy gondoltuk, elég, ha a tantárgypedagógia foglalkozik vele. A saját oktatási tapasztalatok, a hospitálások tapasztalatai és a tankönyvekben tapasztaltak viszont azt mutatták, hogy szükséges és fontos e téma pontos matematikai feldolgozása, mert ez nagyon nehéz, „problémás” téma. A matematikai definíciókat és tulajdonságokat sok példa és ábra alapozza meg, egészíti ki és teszi „szemléletessé”. A szükséges fogalmak egy része – pl. „síkidom”, terület – a Matematika I. gyakorlaton korábban már szerepelt. Külön tárgyaljuk természetes szám törtrészét és geometriai alakzat törtrészét, kiemelve a tulajdonságaik között levő jelentős eltéréseket is.

Különösen hangsúlyos a „részekre osztás” téma: ezen belül felhívjuk a figyelmet a „síkidom egybevágó részekre osztása” és a „síkidom egyenlő területű részekre osztása” fogalmak közti nagyon fontos eltérésre. Ennek kapcsán meg is indokoljuk, hogy a „síkidom törtrésze” fogalom miért a terület fogalmára épül, és miért nem az egybevágóságéra. Azért fontos ezt hangsúlyozni, mert a közoktatási tankönyvek a törtrész témakörben általában „egyenlő részekre osztás”-t említenek, és e megfogalmazás mellé általában „egybevágó részekre osztott” alakzatot mutatnak. Vigyázni kell, mert a felületes értelmezés félreértéshez vezethet: azt gondolhatjuk, hogy „törtrész csak egybevágó részekre osztással keletkezhet”. Ez pedig „hibás” gondolat. Matematikailag nem lenne „hasznos”, ha az egybevágóságra építenénk „síkidom” törtrészének fogalmát, mert ekkor „problémák” lépnének fel. Pl.: Az alábbi ábrán egy téglalap szürke részét kétféleképpen is létrehoztuk: a bal oldalon 4 nem egybevágó rész egyike, a jobb oldalon pedig 8 db. egybevágó részből 2 db-nak az uniója. Ha az egybevágóság lenne a törtrész alapja, akkor a szürke rész a téglalap 2/8 része lenne, de nem lenne az 1/4 része. Így „2/8≠1/4” lenne, vagyis „nem működne az egyszerűsítés”!



3.6. Számegyenes

A korábbiakhoz képest a számegyenes témája is kibővült. A többféle alapú megjelenítés itt is megvalósult. A természetes számot kétféleképpen jelenítjük meg: pontként és szakaszként is.

Az egyenlőségnél, a kisebbnél, az összegnél és a különbségnél is alkalmazzuk mindkét megjelenítési módot. Sőt, a különbségnél még az „elvétel” és a „pótlás” is külön szerepel. Szorzat, többszörös, hányados már csak a szakaszos ábrázolással szerepel.

3.7. Megjegyzések a témákhoz

A korábbiakban azt tapasztaltuk, hogy az előadások során szóban tett megjegyzések „nyom nélkül maradtak”: nem jegyzetelték le ezeket a hallgatók, bármennyire is hangsúlyoztuk azokat. Ezért az új változatban már ezeket is beleszerkesztettük az előadás anyagába. Sok ilyen megjegyzés lett, és az idők során számuk egyre nő. Ezeket a megjegyzéseket nagyon fontosaknak tartjuk.

Már az első, a Bevezetés a számokról c. fejezetben is ilyen, „megjegyzésszerű” témát, a „gyakorlati” és a matematikai számfogalom kapcsolatát részleteztük. A megjegyzések utalnak pl. a tanításban használt szó- és jelhasználatra, és a fogalmak „köznapi eredetére” is. Szó esik bennük arról is, hogy miért éppen egy adott módon alkotunk meg, vagy használunk valamit, és más témánál miért másképp. Sok megjegyzés szól valamelyik fogalom vagy tulajdonság közoktatási megjelenéséről. A megjegyzésekben bizonyos „félreértéseket” is igyekszünk „eloszlatni”. Ilyenekre mutatunk itt két példát.

I. példa:
A gyakorlati életben és a közoktatásban pl. a 7+5=12 egyenlőséghez kapcsolódva olyan megfogalmazások is szerepelnek, hogy:

„A 7 és az 5 az összeg tagjai, a 12 az összeg.”
„7 meg 5 az 12.”
„Mennyi 7+5? A helyes válasz: 12.”
„A 7+5 összeadást elvégezve 12 az eredmény.”

E megfogalmazásoknál vigyázni kell, mert felületes értelmezésük félreértésekhez vezet.
Azt is gondolhatjuk, hogy a 7+5 jel nem jelöli az összeget, hanem csak a 12. Ez nem így van, mert 7 és 5 (ebben a sorrendben vett) összegét a 7+5 jel is jelöli. (Sőt, ez a „kiindulási” jele.)

Azt is gondolhatjuk, hogy a 7+5 jelű szám definíciója, értelmezése az, hogy „7 meg 5 az 12.”. Ez nem így van, mert a 7+5=12 egyenlőség nem a 7+5 szám definíciója, hanem annak „csak” egyik tulajdonsága: konkrétan az a tulajdonsága, hogy az szám, aminek egyik összegalakja 7+5, egyenlő azzal a számmal, aminek tízes számrendszerbeli jele, alakja 12.

Amikor azt kérdezzük, „Mennyi 7+5?”, akkor ezt általában úgy értjük, hogy „Mivel egyenlő 7+5?”, és általában azt a választ fogadjuk el jónak, hogy „12”. Pedig a helyes választ jelentő számot megadhatjuk a 12-től eltérő jellel, alakban is. Pl.: 7+5, 3+9, 13-1, 3·4, 24:2, stb. Ha a „12” alakú választ várjuk, ha csak ezt az alakot akarjuk jó válasznak elfogadni, akkor matematikailag az (lenne) a helyes kérdés, hogy „Mi a 7+5 (összeg) tízes számrendszerbeli alakja?”

Azt is gondolhatjuk, hogy a 7+5 jel „a 7 és az 5 összeadásának műveletét” jelenti, továbbá, hogy „ez a művelet így még nincs elvégezve”, „e műveletnek így még nincs kiszámolva az eredménye”, „e művelet eredményét, ami 12, majd csak a művelet elvégzése után kapjuk meg”. Ezek is „félrevezető” gondolatok. Egyrészt, matematikailag a 7+5 jel nem egy olyan „összeadás”-t jelöl, ami „még nincs elvégezve”. A 7+5 jel egy számot jelöl. Ezt a számot rendeli az összeadás-művelet a (7;5) párhoz összegként. Másrészt, az összeadás-művelet által a (7;5) párhoz összegként, „eredményként” rendelt szám matematikailag már a 7+5 alakban is „megvan”, az „összeadás már így is el van végezve”. De a gyakorlati életben és a közoktatásban az összeget általában tízes számrendszerbeli alakban kell megadni, ott ezt az alakot tekintik „az összeadás eredményé”-nek, ennek az alaknak a „kiszámítását” tekintik „az összeadás elvégezésének”.

II. példa:
Néhol előfordul az „ugyanaz” és az „ugyanannyi” szavak bizonyos értelemben vett „szembeállítása”. A szorzás „ismételt összeadásos” értelmezésénél, pl. a 3·2=2·3 egyenlőség kapcsán egyes tankönyvekben az „Ugyanannyi, mégsem ugyanaz.” vagy a „Nem ugyanaz, de ugyanannyi.” mondat olvasható. Ezzel ott arra utalnak, hogy a két említett szorzat egyenlő, „ugyanannyi”, hiszen mindkettő 6, de mivel a bal oldali szorzat jelentése 2+2+2, a jobboldalié pedig 3+3, így „nem ugyanazok”. E mondatok használatával vigyázni kell, mert felületes értelmezésük „részben félrevezető” lehet. Ugyanis a 3·2 jelű, szorzatalakú szám és a 2·3 jelű, szorzatalakú szám nemcsak „ugyanannyi”, nemcsak mindkettő 6, hanem igenis logikailag azonosak: mindkét jel ugyanazt a számot „jelzi”. Ezt az azonosságot, vagyis a 3·2=2·3 egyenlőség igazságát a 6-ra való hivatkozás nélkül is meg lehet mutatni, többféle módon is. Tehát csak „formai alapon” mondhatjuk, hogy 3·2 és 2·3 „nem ugyanazok”. Ilyen „formai

alapon" azonban majdnem minden egyenlőséggel kapcsolatban elmondhatnánk ezt: pl. a 3·2=6 esetén is, hiszen „ugyanannyik", mert mindkettő „6", de „nem ugyanazok", mert a baloldal „2+2+2", a jobboldal pedig „6".

Végül pedig, egyes megjegyzésekben gyakran előforduló hibalehetőségekre hívjuk fel a figyelmet. Itt is két példát mutatunk, amikkel rendszeresen találkozunk a dolgozatokban.

I. példa:

Egy „műveletsort" csak akkor írhatunk le egyetlen „egyenlőséglánc"-cal, ha „már a kezdésnél szerepel benne minden művelet". Ha „a műveleteket külön akarjuk elvégezni", akkor több egyenlőséget kell leírni. Pl.: ha a »2 és 3 összege szorozva 4-gyel« „műveletsort" kell leírni, akkor vagy azt írjuk, hogy „(2+3)·4=5·4=20", vagy külön azokat, hogy „2+3=5" és „5·4=20". Tilos „keverni" a két módszert: az előbbi példát nem lehet úgy leírni, hogy „2+3=5·4=20", mert az első egyenlőség hamis.

II. példa:

Tilos „keverni" a maradékos osztás egyenlőségét az írásbeli osztás formulájával. Pl.: „A 9-nek 4-gyel való maradékos osztásánál a hányados 2, a maradék 1." állítást a 9=2·4+1 egyenlőség írja le. Ugyanennek az állításnak az írásbeli osztásos formulája: 9:4=2.
1

„Összekeverésük" a hamis 9:4=2+1 egyenlőségre vezet.

4. Vizsgák, visszajelzések

A kurzus kollokviummal zárul. A vizsgaanyag nem a teljes előadásanyag, hanem annak csak kb. 40%-a: azok a részek szerepelnek benne, amik megítélésünk szerint a legfontosabbak, a legszükségesebbek a továbbhaladáshoz. A vizsgaanyagot külön dokumentumban megkapták a hallgatók.

A vizsga írásbeli és szóbeli részből áll. Az írásbeli rész „beugró" jellegű: csak az a hallgató mehet tovább a szóbeli részre, aki az ebben megadott összes témát (közel) hibátlanul leírja. Az írásbeli rész témái:

- „Nulla" és „egy" a valós számok alapján
- Természetes szám a valós számok alapján
- „Kettő" a valós számok alapján
- Peano-alapfogalmak és az első négy Peano-axióma
- „Egy" és „kettő" a Peano-axiómák alapján
- Ugyanannyi elemű halmazok; véges halmaz; üres halmaz
- Természetes szám a véges halmazok alapján
- „Nulla", „egy" és „kettő" a véges halmazok alapján

A szóbeli részben 4 tétel húztak a felelők: ezekben 1-1 reláció és művelet fogalmáról, és tulajdonságairól kell beszélniük. Példa egy tételnégyesre:

- Természetes számok kisebbjének fogalma a véges halmazok alapján
- Természetes számok szorzatának fogalma az összeg alapján
- Természetes számok többszöröse (osztója) tulajdonságai
- Természetes számok kivonása tulajdonságai

Néhány adat a vizsgák számszerű eredményeiről. Az elmúlt két tanévben 56, ill. 50 fő I. évfolyamos, nappali vagy levelező tagozatos hallgató vizsgázott a Matematika II. kollokviumon. (Volt még kb. 10-10 fő újra vizsgázó felsőbb évfolyamos is, de Őket itt most nem számítjuk.) Közülük 44 ill. 39 fő végül sikeresen le is vizsgázott. Az érdemjegyek megoszlása: jeles 9 ill. 4 fő, jó 6 ill. 7 fő, közepes 10, ill. 13 fő, elégséges 19, ill. 15 fő.

A visszajelzésekkel kapcsolatban elmondható, hogy a fő problémát a matematikai szöveg precíz megtanulása jelentette. Néhány jellemző hallgatói megjegyzés ezzel kapcsolatban:
- „Mindent értek, minden világos, csak megtanulni nehéz."
- „Nem hittem, hogy megtanulom, de aztán belejöttem."
- „Furcsa volt az elején, aztán megértettem a rendszerét, és még tetszett is."

Főleg a levelező tagozatos hallgatóktól – akik már tapasztaltabbak – az anyag hasznosságáról is pozitív visszajelzést kaptunk. A műveleti tulajdonságok „haszná"-ról szóló példák kapcsán egyikük megjegyezte: „Jó lett volna, ha korábban is hallok ilyenekről." Egy másik hallgató, akinek 2. osztályos a gyermeke, és éppen „küzdöttek" otthon a tankönyv bennfoglaló osztás és részekre osztás témájával, úgy nyilatkozott: „Végre értem, hogy ez nem két különböző művelet, hanem csak két megközelítése ugyanannak a dolognak."

A jövőben is igyekszünk majd tovább javítani, „csiszolni" az előadáson: egyrészt annak érdekében, hogy a hallgatók minél jobban megértsék és elsajátítsák a tananyagot; másrészt azért is, hogy a hallgatók előtt világossá váljon: a feldolgozott matematikai témák biztos tudása elengedhetetlenül szükséges ahhoz, hogy eredményesen taníthassanak az alsó tagozaton.

Irodalom

Árvainé Libor I. et al. 2009a. *Sokszínű matematika 1. (I-II)* Szeged: Mozaik Kiadó.

Árvainé Libor I. et al. 2009b. *Sokszínű matematika 2. (I-II)* Szeged: Mozaik Kiadó.

Árvainé Libor I. et al. 2009c. *Sokszínű matematika 3. (I-II)* Szeged: Mozaik Kiadó.

Árvainé Libor I. et al. 2009d. *Sokszínű matematika 4. (I-II)* Szeged: Mozaik Kiadó.

Balassa Lászlóné et al. 2014. *Harmadik matematikakönyvem 3.* Eger: Eszterházy Károly Egyetem (Apáczai Kiadó Kft.) Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet.

Balassa Lászlóné et al. 2016. *Negyedik matematikakönyvem 4.* Eger: Eszterházy Károly Egyetem (Apáczai Kiadó Kft.) Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet.

Csahóczi E. et al. 2013a. *Matematika 5.* Eger: Eszterházy Károly Egyetem (Apáczai Kiadó Kft.) Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet.

Csahóczi E. et al. 2013b. *Matematika 6.* Eger: Eszterházy Károly Egyetem (Apáczai Kiadó Kft.) Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet.

Csordás M. et al. 2009. *Sokszínű matematika 6*. Szeged: Mozaik Kiadó.

Csordás M. et al. 2013. *Sokszínű matematika 5*. Szeged: Mozaik Kiadó.

Esztergályos J. 2013. *Az én matematikám 2.* Eger: Eszterházy Károly Egyetem (Apáczai Kiadó Kft.) Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet.

Kóródi B. (vezető szerk.) 2014. *OFI Matematika 2 I-II*. Budapest: Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet.

Kóródi B. (vezető szerk.) 2015a. *OFI Matematika 1 I-II*. Budapest: Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet.

Kóródi B. (vezető szerk.) 2015b. *OFI Matematika 4*. Budapest: Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet.

Kóródi B. (vezető szerk.) 2017. *OFI Matematika 3*. Eger: Eszterházy Károly Egyetem.

Kórus P. 2017. Matematika gyakorlatok első éves tanítóképzős hallgatóknak. *XX. Apáczai-napok Nemzetközi Tudományos Konferencia tanulmánykötete*. 264–268. https://lib.sze.hu/downloadmanager/details/id/32114/m/10785 (Letöltve: 2019.12.03.)

Krisztin Német I. 2017. Az útkeresés folytatódik – A tanító szakos hallgatók alapképzésének Matematika előadása. *XX. Apáczai-napok Nemzetközi Tudományos Konferencia tanulmánykötete*. 259–263. https://lib.sze.hu/downloadmanager/details/id/32114/m/10785 (Letöltve: 2019.12.03)

Krisztin Német I. 2018. Kérdések a tanítóképzés matematikájáról a közoktatási tankönyvek fényében. *XXI. Apáczai-napok konferencia tanulmánykötete*. 241–251. https://lib.sze.hu/downloadmanager/details/id/34176/m/10785 (Letöltve: 2019.12.03.)

Kuruczné Borbély M. 2013. *Az én matematikám 1.* Eger: Eszterházy Károly Egyetem (Apáczai Kiadó Kft.) Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet.

Szalay I. 2008. Kudarcok és sikerek, útkeresés a tanítók matematika képzésében. *XI. Apáczai Napok Tanulmánykötet*, 386–390. https://lib.sze.hu/downloadmanager/details/id/26474/m/10785 (Letöltve: 2019.12.03.)

Szalay I. 2009. A folytonos és a szivacs modell ötvözete a tanítók matematika képzésében. *XII. Apáczai Napok Nemzetközi Tudományos Konferencia tanulmányai*, 235–239. https://lib.sze.hu/downloadmanager/details/id/26475/m/10785 (Letöltve: 2019.12.03.)

Szalay I. 2010. A tanítóképzés Általános matematika tárgya vizsgáinak tapasztalatai. *XIII. Apáczai Napok Nemzetközi Tudományos Konferencia tanulmányai*. 475–481. https://lib.sze.hu/downloadmanager/details/id/26476/m/10785 (Letöltve: 2019.12.03.)

Szalay I. 2011. Egy tankönyvkészítés anatómiája. *XIV. Apáczai Napok Nemzetközi Tudományos Konferencia tanulmányai*, 864–871. https://lib.sze.hu/downloadmanager/details/id/26477/m/10785 (Letöltve: 2019.12.03.)

Tóthné Szalontay A. (vezető szerk.) 2016. *OFI Matematika 5*. Budapest: Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet.

Tóthné Szalontay A. (vezető szerk.) 2017. *OFI Matematika 6*. Eger: Eszterházy Károly Egyetem.