A térlátás képességének fejlesztése

Tóth Attila – Csáky Antal – Nagy Lehocky Zsuzsa
Nyitrai Konstantin Filozófus Egyetem, Nyitra

Bevezetés

A diákok többsége sajnálattal veszi tudomásul, hogy mindenütt szükség van matematikára, és nem akarják elhinni azt sem, hogy éppen az ő, tehát a főiskolát végzettek tudására és képességeinek a fejlesztéseire van és lesz szükség. Az új évezredben a matematika új fejezeteket nyitott meg, és rátért egy újabb, könnyebb, mértani megoldásokat tartalmazó útra. Mivel a legnagyobb nyereség és a lehető legkisebb kiadás, költség és veszteség számítása elsősorban közgazdasági feladat, ezért az ilyen jellegű iskolákban lenne szükség ezen ismeretek mélyebb szintű oktatására. A mértani megoldások helyettesítik a bonyolult és sokismeretlenes egyenleteket és egyenlőtlenségeket s a számítógépek napokig tartó helyettesítő módszereit (Fecenko 2006). Éppen ezért azt szeretnénk bemutatni, milyen mértani tudásra és térlátásra van szükség ezeken a szakokon. A nem műszaki jellegű iskolákban is tehát szükség van a mélyreható geometriai ismeretekre. Az új kihívások pedig bővített, új fejezeteket igényelnek, több óraszám bevezetését igényelnék, fókuszálva a geometriára a matematikán belül és nemcsak a középiskolákban. A tanulmányban bemutatjuk, hogy mi okoz gondot a mértani berkekben és a mértani feladatok megoldása során, milyen tapasztalatokkal rendelkezünk az idegenforgalmi szakon a közgazdasági jellegű matematikaoktatás területén. Mindezekből kifolyólag a mértani tudásra, a térlátás fejlesztésére óriási szükség van *(Maczák 2016)*. Rámutatunk arra, hogy milyen számtani-mértani hiányosságokkal érkeznek a hallgatók, ami indokolja a fejlesztést (Tóth 2015; Maczák 2016).

1. Gyenge matematikai tudásszint

A korábbi évtizedekben megfigyelhető volt az iskoláinkban, hogy tanulási nehézségek jelentek meg, és a matematikához való viszony is romlott. Magyarországon és Szlovákiában is megfigyelhető, hogy a matematikai teljesítmény romlott. A több évtizedes tapasztalataink alapján elmondható, hogy ez „egyfajta” lelki betegség (Maczák 2016). A tanulmányok arról számolnak be, hogy alapvető hiányosságok vannak a diákok matematikai tudásában, nem tudják alkalmazni a műveleteket. Ha a tanítók nem tanítják meg következetesen a szorzótáblát, akkor a gyerekek nem számolnak fejben, és az alapvető műveletek is feledésbe merülnek. Ez már magában is matematikai teljesítményzavart, számolási zavart okozhat. Ezért kialakulhat a tantárgy iránti félelem. De sajnos már megjelenik a főiskolás berkekben is az ún. diszkalkulia (Maczák 2016). Az egyébként jól teljesítő gyereknek súlyos és tartós lelki gondot okoz az élet minden területén a számolás, a számnevek használata és a számok helyének felismerése a számsorban (SRPSZKK 2020).

A tanulmányban néhány módszert alkalmazunk, amelyekkel a mértani térlátás fejleszthető. A számítógépek megjelenése és használata egyértelműen lecsökkentette a saját gondolkodást, számolást, a keresési hajlamot pedig óriásira fejlesztette. Gyengék az elemző, egységesítő és összehasonlító képességek, de nem bizonyított, hogy ezeknek a problémáknak genetikai okai lennének. A szöveges feladat megoldásához szükséges képességek kialakításánál az absztrakciók szimbólumokhoz kötődnek, melyeket a hallgatók sok esetben nem értenek, illetve helytelenül értelmeznek. Az új évezred küszöbén születettek számára a geometriai alakzatok síkbeli és térbeli viszonyai és a geometriai fogalmak bonyolultnak tűnnek. Ha halmozódnak a nehezítő körülmények, a megoldási képesség szintje is csökken. Az aritmetikai háttérrel működő szöveges feladatmegoldó képesség és a geometriai tartalmakhoz való viszony nagy hiányosságokat mutat. A geometriai tartalmú feladatok értelmezése és helyes megoldása nemcsak az általános iskolákban, hanem a középiskolákban és újabban a főiskolákon is komoly gondot jelent. Ezeket a nehézségeket igyekeztünk felmérni ebben a tanulmányban.

2. Miért és miben mutatkozik meg a geometriai alapok hiánya?

A matematikai tudás nemcsak a közgazdasági szakokon, de a rokon jellegű szakokon is, mint például az idegenforgalmi szakon is egyre fontosabb. Mint látjuk, a világ nem egyszerűsödik, hanem egyre bonyolultabb és kiszámíthatatlanabb lesz. A világban zajló események matematikai képletekkel és geometriai modellekkel írhatók le. Tapasztalható, hogy az időjárás pontosabb előrejelzésében a modellek mennyit segítenek. Például ha lenne egy-egy vállalatnál „GPS”, amelyik megmutatná, hogy melyik a legalacsonyabb gazdasági szint, és időben jelezné a fenntarthatóságot, bizonyosan sokat segítene. Ezekben a feladatokban a lehetséges lépések elemzése és értékhatárok közötti tartása a cél (Fecenko 2006). A közgazdasági szakokon rendkívüli módon fontos, hogy a hallgatók ki tudják számítani a maximális bevételt, nyereséget (profitot), a minimális veszteséget és kiadásokat. Hiszen ez lenne a vállalatok túlélésének a titka. A legtöbb hallgató úgy gondolja, hogy nem lesz ezeken a szakokon nehéz a matematika, és nem lesz szüksége geometriára sem.

Az optimalizálási feladatok az új évezred küszöbén jelentek meg. A feltételes optimalizálás új kaput nyitott, újszerű, érdekes és izgalmas területeket, melyek geometriai alapokra épülnek. Ha a feltételes optimalizálás csak 2 feltételből áll, akkor síkbeli feladatként oldható meg, de 3 feltétel, illetve 3 változó esetében már csak térbeli megoldásokat találunk. Az új területet a lineáris programozás névvel látták el, nagyon sok változó esetén az optimalizálás behelyettesítésekkel oldható meg, ami még a számítógépek számára is több napig tarthat. De geometriai szempontból nézve a feladat csak egyszerű egyenesekből és félsíkok halmazából áll. Az is bizonyított, hogy a vállalatoknál az asztali számítógépek a legtöbb órában, sőt napon is optimalizálási feladatokon dolgoznak. A célfüggvény értékét, az optimális megoldást keresik az adott feltételek mellett *behelyettesítési – ún. simplex – módszerrel. Geometriailag sokkal kevesebb idő alatt és egyszerűbben oldható meg ugyanaz a feladat.* Tehát érdemes megkönnyíteni a feladatot és elsajátítani a mértani módszert.

Nagyszerű geometriai megoldásokat találtak, és a sok behelyettesítés helyett egyszerű félsíkok közös halmazához való közelítéssel már megoldható a kétismeretlenes feltételes optimalizálás.

3. A legtöbb nehézséget okozó síkbeli feladatok

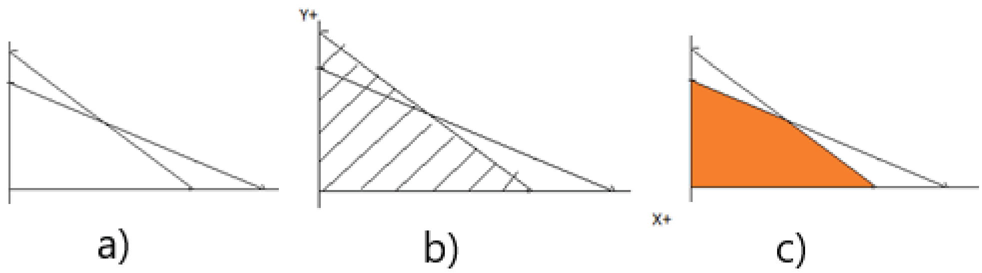
A gyakorlati feladatok zöme lineáris. Eszerint elsőfokú ismeretlenekkel számolunk, tehát mértanilag egyszerű egyenesekkel lehet dolgozni. Az egyeneseket meg lehet rajzolni értéktáblázat segítségével, amit már minden középiskolában tanulónak ismernie kell, főleg a félsíkok meghatározását kellene megérteniük. Az analitikus geometria az egyenesek egyenletéről és azok iránytényezőinek a számításáról és ábrázolásáról szól.

Mi a gond például egy ilyen jellegű feladat esetében? Képzeljük el, hogy olyan vállalatunk van, ahol van egy célfüggvényünk $f(x;y)\colon 2x+7y$, és emellett van kettő darab részlegünk (feltétel). Meg kell határozni, hogy melyik működtetése optimálisabb (Sydsaeter 2006). Ha tehát a nyereség a $2x+7y$ prímfüggvény alapján működik, és ezen a két részlegen tudunk a profitra szert tenni, akkor ez egy maximalizálási feladat két feltétel mellett:

max($2x+7y$), ha a feltételek $\begin{cases} 4x+5y \le 20 \ \ (1.részleg) \\ 3x+7y \le 21 \ (2.részleg) \end{cases}$ $x \ge 0, y \ge 0$

Vegyük észre, hogy a feltételek már itt előrejelzik az értékhatárok közti területet, ami például áringadozást, energiabeszerzést jelenthet. Hogyan is rajzoljuk meg a 2 egyenest, illetve félsíkot a feltételek figyelembevételével? Klasszikus módon 2-2 pont segítségével, az x és y tengelyen először tehát az egyenlőtlenségek helyett egyenlőségként oldjuk meg a két feltételt.

$4x + 5y = 20;$ behelyettesítve $x = 0$, akkor $y = 4$, ami a $[0; 4]$ pontot adja, majd a többi pontot is megrajzolva az egyik egyenest a $[0; 4]$ és $[5; 0]$ pontok adják, a másikat pedig a $[7; 0]$ és $[0; 3]$ pontok adják (1a). A félsíkot úgy határozzuk meg, hogy behelyettesítjük az $4x + 5y \leq 20$ egyenlőtlenségbe például a $[0; 0]$ pontot, ha a relációjel teljesül, akkor az a félsík, amelyik tartalmazza a $[0; 0]$ pontot (1b). Természetesen nem üzemeltethet valaki mínusz egy órát, tehát csakis a pozitív tengelyeken (síknegyedben) dolgozunk.



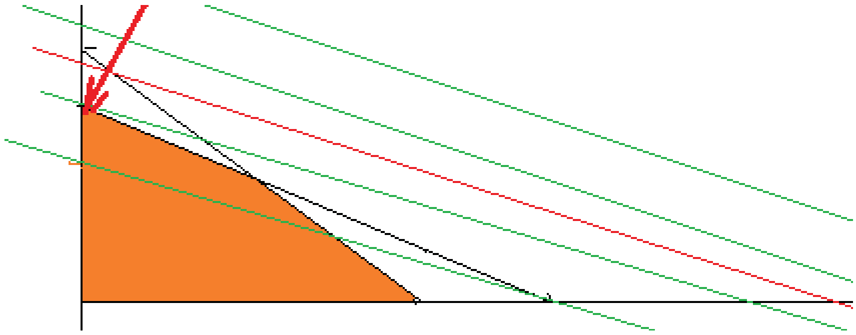
1. ábra: 2 egyenes a pozitív síknegyedben, majd a felső egyenes alatti félsík és végül a közös halmaz
Forrás: saját szerkesztés (2020)

Ha a másik egyenes alatti félsíkot is meghatározzuk, akkor a közös halmaz a narancssárga alakzat (1c). Tapasztalatunk alapján a közös halmaz jelölése okozza a legnagyobb gondot. A narancssárga alakzat adja meg a feltételek ún. S értelmezési tartományát. Maximalizálási példa esetén ehhez a közös halmazhoz kell közelíteni felülről a fő (ill. cél) függvény párhuzamosaival (alulról közelítve megkapnánk a $[0; 0]$ pontot, ami a minimum az f(x;y):$2x + 7y$ függvényhez, számértékekben kifejezve $x^* = 0; y^* = 0$, ebből $f^* = 0$. Tehát ez a minimum).

A maximum meghatározásához másféle módszer használható. Mivel párhuzamosokkal kell közelítenünk felülről, ezért meg kell vizsgálnunk, hogyan is alkotunk a fő függvénnyel párhuzamosokat. A fő függvény legkisebb közös többszörösét vesszük itt figyelembe (2 és 7). Jelen esetben ez a választott szám például lehet $2x + 7y = 14$; és ez a 2. ábrán a legalsó zöld vonal, amelynek a pontjai a (7,0) és a (0,2). Tehát ha felülről haladunk párhuzamosokkal, akkor nagyobb választott számmal kell dolgoznunk. Ehhez a művelethez a legkisebb közös többszörös fogalmának ismerete és alkalmazása szükséges.

Lehet például az első választott szám kétszerese, például 28 (piros vonal), majd ezzel az egyenessel párhuzamosakat húzunk, melyeket a zöld egyenesek reprezentálnak (2. ábra). A piros nyíl mutatja azt a pontot, ahol elértük a párhuzamos egyenesek segítségével a narancssárga mező felső csücskét. A legelső pont, amivel hozzáérünk az értelmezési tartományhoz a megoldás. Ez a maximálisan elérhető nyereség az adott feltételek mellett.

Ez a pont a (0,3). Mit is jelent ez pontosan? Például ha 2 részleget (szállást) üzemeltetünk, akkor az x-et be kell zárni, illetve nulla órát (napot) üzemeltetni, az y van üzembe helyezve 3 órára (napra), pontosan aszerint, milyen egységben van megadva a feladat. Az optimum tehát $(x^*, y^*) = (0; 3)$.



2. ábra: Közelítés a fő függvény zöld párhuzamosaival az S értelmezési közös halmazhoz
Forrás: saját szerkesztés (2020)

A világjárvány következtében azonban az idegenforgalmi részlegünk tönkrement anyagilag. Azért, hogy ne kelljen kölcsönöket felvenni, más adósságokba keveredni, elhatároztuk, hogy eladjuk a vállalatot ebben a mintapéldában. Tehát mint tulajdonos, főnök vagy a vezér okos alkalmazottja. mi maximális árat kérünk.

Most tovább bonyolítjuk a példát. Megérkezik az ázsiai vállalkozó, tetszik neki a vállalkozásunk, a részlegeink, egyezkedik, és minimális összegért szeretne befektetni. Itt alkalmazhatjuk a matematika egyik legújabb vívmányát: mivel bizonyította, hogy az eladó maximális árat kér, a vevő a vállalatunkért minimális árat fizetne, de kiderült, hogy a kettő egyforma. Tehát az f^* maximuma és minimuma megegyezik. Ez adja a feljebb ismertetett prímfüggvény duálját (a prímet maximalizáljuk, és a duált minimalizáljuk).

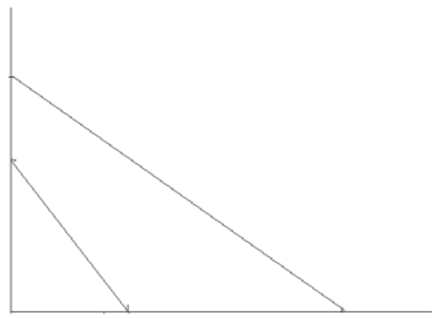
Hogyan fejezzük ki a duális függvényt? Először is a feltételekből transzponált mátrixot állítunk elő. Ehhez a hallgatóknak el kell sajátítaniuk a mátrixok számítását és azok transzponálását is:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Az elmélet szerint a prím elején megadott együtthatók a duál végére kerülnek, és megfordítva. Tehát a (2;7) a fő függvényből jut a duális végére, a vége (20; 21) a fő feltételeiből a duális elejére, a duális függvény így alakul:

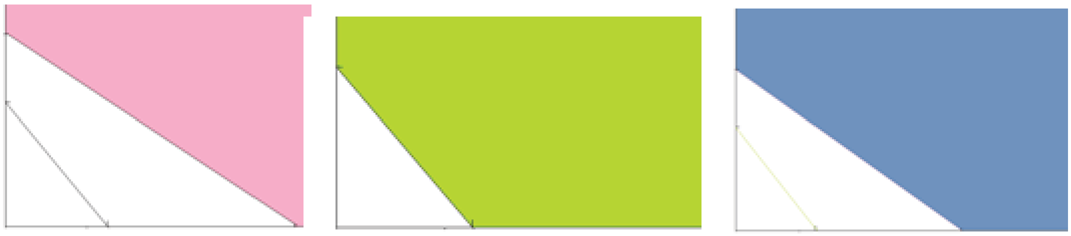
$$\min\,(20u_1 + 21u_2) \text{ ha a feltétel } \begin{cases} 4u_1 + 3u_2 \geq 2 \\ 5u_1 + 7u_2 \geq 7 \end{cases} u_1 \geq 0; u_2 \geq 0$$

A vevő minimális kérését ugyanúgy geometriai úton, csak fordított irányból oldjuk meg, ez a duális. Először ábrázolni kell az egyeneseket, amelyeknek a pontjai a már ismert módszerrel (0; 0,66) és (0,5; 0) az egyik egyenesnek, a másik egyenes pontjai (0; 1) és (1,4; 0). Mindebből látható, hogy érdemes más mértéket használni, például nagyítva. A két feltétel egyenesei a pozitív síknegyedben az alábbi szakaszok (3. ábra):



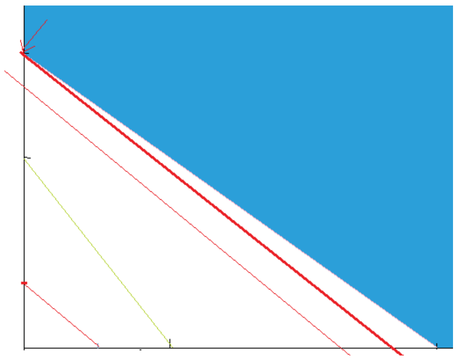
3. ábra: A prím függvényből kialakított duál 2 szakasza, amelyek egyenesek a jobb felső síknegyedben
Forrás: saját szerkesztés (2020)

De a relációs feladat (az egyenlőtlenség) most az egyenesek feletti halmazokat jelenti, amelyek a rózsaszín és a zöld halmazok (4. ábra). Megint a közös halmaz meghatározása problémát okoz a hallgatóknak. Illetve az egyenesek alatti még számukra érthetőbb, mint az egyenesek feletti félsík meghatározása.



4. ábra: A duál feladat rózsaszínből és zöldből kialakított kék közös halmaza
Forrás: saját szerkesztés (2020)

A kettő közös halmaza csak a felső feletti rész, és ez a kék, tehát abszolút független az alsó feltételtől, amely alkalmas jelöléssel egyszerűen megoldható.



5. ábra: A minimalizálásnál alulról közelítünk a fő függvény párhuzamosaival (piros vonal) – saját szerkesztésű ábrák
Forrás: saját szerkesztés (2020)

Tehát ehhez a kék alakzathoz kell közelíteni alulról. Hiszen minimalizálási feladat a fordított feladat, de figyelembe kell venni, mekkora a nagyításunk. A hallgatók zöme általában a prím feladatokban jobban meg tudja találni a közös halmazt, de a duális feladatokban nagyobb gondot okoz a közös halmaz, ezért javasolt a szemmel látható elkülönítés, például satírozás.

Ismét jön a duális célfüggvénye, és azért, hogy tényleg alulról jöjjön a párhuzamos, akkor a megoldásként kapott számot nem nagyítjuk ki, hanem eredeti mértékben visszük fel a számegyenesekre. Gondot okoz a nagyítás is, nincs gyakorlatuk a léptékekben, pedig mint idegenforgalom szakosok, nagyon jól kell, hogy ismerjék a térképeket és azok léptékeit. Ez a geometria tehát ebben is segíti ezeket a hallgatókat.

Ebben a lépésben ismét egy választott számot keresünk, legyen például az 50.

$$20u_1 + 21u_2 = 50$$

$u_1 = 0$ *és ebből* $u_2 = \frac{50}{21} = 2{,}4$ illetve fordítva, ha $u_2 = 0$ *akkor* $u_1 = \frac{50}{20} = 2{,}5$

Tehát megkaptuk az egyenes két pontját, ami a (0; 2,4) és (2,5; 0) legalsó, piros vonal (5. ábra). Ezzel a piros egyenessel (főfüggvény), illetve párhuzamosaival közelítünk a kék alakzathoz alulról. Vegyük észre, hogy mennyire fontos a pontos szerkesztés, mennyire függ az iránytényezőtől – mert ha nem lenne a piros egyenesünk ennyire meredek, akkor a megoldás nem az y tengelyen lenne (piros nyíl), hanem az x tengelyen (5. ábra). Az iránytényező fogalmát csak az analitikus geometria órákon lehet elsajátítani.

A feladat tehát egyszerű félsíkok metszetével megoldható. Mint az az 5. ábrán látszik, a megoldás, ahogyan alulról a piros egyenesekkel közelítünk a kék halmazhoz, a piros nyíllal megjelölt pont, a minimum tehát az $u_1^* = 0; u_2^* = 1$ pontban van. Tekintsük meg az ellenőrzést, mit is kaptunk most? F optimum (csillagos) $f^* = 20u_1 + 21u_2 = 21,$ ami a duális megoldása. Elfelejtettük megnézni a prím megoldását, a fő függvény, ill. célfüggvény $f(x, y)$: $2x + 7y,$ az optimális pontjai $(0; 3),$ tehát $f^* = 2x + 7y = 21$ szintén.

A geometriai megoldás csupán kellő fokú geometriai tudást és pontosságot igényel. Jól látható, hogy az egyenesek iránytényezőjétől nagyon sok minden függ. Ez gondot okoz a főiskolai hallgatóink számára. A főfüggvények optimális megoldásai egyformák, ez a bizonyítéka annak, hogy maximális árért szerettük volna eladni az idegenforgalmi vállalatot, az ázsiai vevő minimális összegért akarja megvásárolni, és ez a két optimum egyforma. A feladatot megoldhatjuk egyenletekkel, más módszerrel is (Lagrange), illetve hosszas helyettesítéssel is.

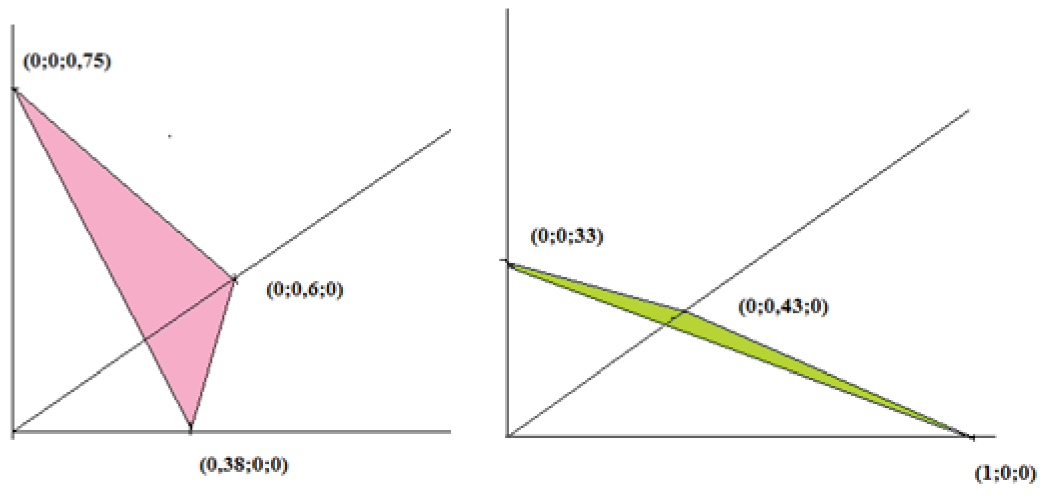
4. A térbeli feladatok nehézségei

Rendelkezésünkre áll 3 részleg, és a havi kiadásokat minimalizálnunk kellene. A feltételek változatlanul szorítanak bennünket, és ezeket be kellene tartanunk, hiszen az energiaköltségekről szólnak, illetve azok változásairól. A leglényegesebb a fenntarthatóság energia és bérek szempontjából. A kérdés az, hogy melyik részlegünket indítjuk, melyiket nem, ha adottak:

$\min(2400u_1 + 3500u_2 + 3600u_3)$, ha a feltételek $\begin{cases} 30u_1 + 70u_2 + 90u_3 \geq 30 \\ 80u_1 + 50u_2 + 40u_3 \geq 30 \end{cases};$

$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$ a $u_3 \geq 0$

Amint látható, ez egy háromdimenziós feladat. Melyiket engedjük maximális kapacitással, és melyiket nem, gyors ütemben el kell dönteni. A vezér néhány órát ad csak a döntésre, hiszen ezért alkalmazott minket, hogy egyetemi végzettségünknél fogva rájöjjünk a megoldásra, hiszen ezt a közgazdasági matematika berkein belül tanítják. Ha hónapokról vagy hetekről vagy napokról szól a feladat, a megoldást is hónapokban, hetekben, illetve napokban kapjuk.



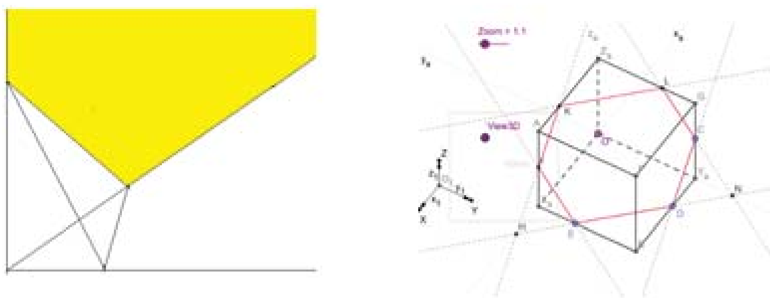
6. ábra: A feltételek itt térbeli síkok, amelyeken a közös síkfeletti fenti halmazát kellene megrajzolni
Forrás: saját szerkesztés (2020)

Hogyan is szerkesztettük meg a feltételben adott síkokat? Az egyenlőségjellel. Hol is mennek át ezek a feltételek síkjai a tengelyeken? Például az x tengely az az lenne, hogy y=0 és z=0. Majd fordított kombinációkban. Jelen esetben úgy kezdjük, hogy $u_1 = 0; u_2 = 0$, behelyettesítjük az $30u_1 + 70u_2 + 90u_3 = 30$ egyenletbe, megkapjuk, hogy az u_3: $u_3 =$

$\frac{30}{90} = 0{,}333$, tehát ez a bal pont a jobboldali 6. ábrán. Fokozatos behelyettesítéssel lehet a pontokat felvenni. A 6. ábra rózsaszínű és zöld halmazai a feltételek legalsóbb, még tolerálható szintjei. Ezek az egyenesek mutatják a gazdaságilag fenntartható legalacsonyabb állapototot. A közös halmazt kell ábrázolni, amely a 7. ábrán a fentibb szakasz felett van (0;0;0,75) és (0;0;0,33). Meg kell állapítani, hogy a baloldali ábra yz síkban található egyenese vagy a jobboldali ábra yz síkban lévő egyenese van-e feljebb. A rózsaszín, tehát mintha esztergakéssel faragnánk a halmazt fokozatosan, és például a sárga részt kapnánk a lejjebb levő, bal oldali 7. ábra szerint.

Ez már nehezebb feladat, ezért is tanítják gimnáziumokban a kockát és annak metszeteit. Ezekben a feladatokban mindig meg kell keresni a közös pontokat, majd ezekből egyeneseket húzunk (mert 2 pont már meghatároz egy egyenest), így találjuk meg a közös egyeneseket, síkokat, metszeteket. Ez a feladat gyakorlatilag a praktikus kivitelezése, fizikai úton történő létrehozása a kockametszetek szerint.

A síkok egyenesekből tevődnek össze, így alakulnak ki a síkrészek a térbeli pozitív térnyolcadban.



7. ábra: A közös halmaz síkjainak meghatározására történő próbálkozások és a kocka metszetei
Forrás: saját szerkesztés (2020)

A főfüggvény párhuzamos síkjaival kellene közelíteni a térbeli kockametszetekhez. Ezeknek a térbeli kivitelezése nehéz. A matematika mégis megoldást talált, mégpedig úgy, hogy a prím feladatoknak meghatározták a duálját, megoldották síkban, majd visszatranszponálták a térbe. Tehát a komplikált térbeli feladatok átképezve megoldhatók a síkban, majd visszaképezve megkapjuk a megoldást.

A feladatok bizonyítják, hogy a többnapos számítások helyettesíthetők néhány percig tartó geometriai rajzokkal. Ezért olyan óriási fontosságú ilyen értelemben a geometria alapos ismerete, ami síkbeli alakzatok ismeretét és egyfajta térlátást is igényel.

5. Miért van szükség a szabályos alakzatok ismeretére?

A közgazdasági jellegű középiskolákban és főiskolákon, illetve amelyekben az ilyen típusú matematikát tanítják, a tanterv alapján meg kell ismerni a hallgatóknak a monopolista és a monopszonista fogalmakat is.

A következő példában ismertetjük a feladatot. Hogyan is számítottuk ki a nyereséget? Ha például monopolhelyzetben vagyunk, akkor az egyik országban Q_1 mennyiséget adunk el a mi általunk meghatározott P_1 árért, illetve Q_2 mennyiséget P_2 árért. Ezeket a lakosság vásárlóerejéhez szabják. Miszerint a nyereség $\pi = P_1Q_1 + P_2Q_2 - 6C = 40Q_1 - Q_1^2 + 30Q_2 - Q_2^2 - 6Q_1 - 6Q_2$. Adott a bemenet, az ár a mennyiségtől függ: $P_1 = 40 - Q_1$; $P_2 = 30 - Q_2$, és a költségek $C = 6Q = 6Q_1 + 6Q_2$, tehát minden termékre hatszoros.

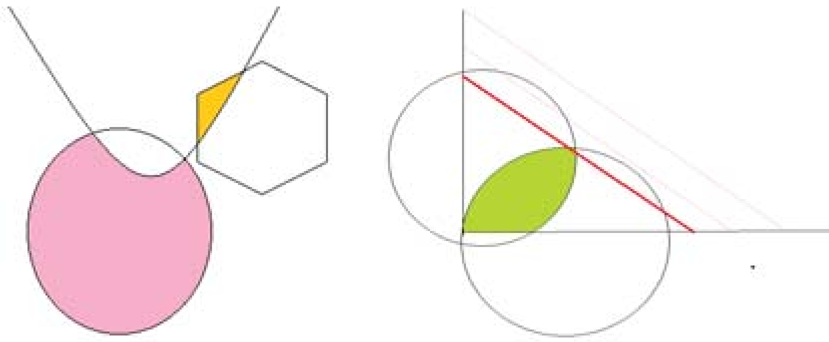
Ezeket az egyenleteket könnyedén átalakíthatjuk kvadratikus formára, így egy kört kapunk, amelynek a sugara 25 egység, és a középpontja el van tolva a $[20; 15]$ pontba. Az egyszerűség kedvéért nem Q_1Q_2; hanem x,y paraméterekkel dolgozunk általában:

$$(x-20)^2+(y-15)^2=25^2$$

Mert $x^2-40x+400+\ y^2+30y+225=625$; itt 25 a sugár.

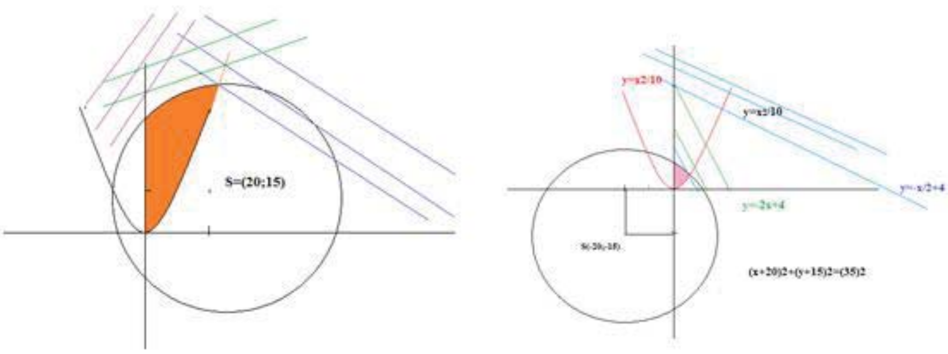
Tehát a fenti P, Q egyenlet átalakítható x, y változós körré – így az összes ilyen jellegű példa megoldása lehetséges geometriai úton is, nem kell hozzá deriválás és egyéb számítás sem. A tapasztalat viszont azt mutatja, hogy a hallgatók ragaszkodnak a számításokhoz, bármilyen mennyiségű egyenletet számítanak inkább, mintsem egyszerűen hozzá kezdjenek rajzolni.

Ezek már inkább nemlineáris feladatok. Itt már köröket, parabolákat, gömböket kell tudni rajzolni, azok belsejét vagy külsejét, attól függően, hogy melyik irányban van a kacsacsőr. Szemléltetésként bemutatnánk néhány nemlineáris feladat geometriai ábráját.



8. ábra: Különböző gyakorlati feladatok geometriai megoldásai
Forrás: saját szerkesztés (2020)

A 8. ábrán látható egy hatszög és a parabola belsejének közös halmaza (narancssárga), illetve egy kör belsejének, és a parabola külsejének közös halmaza (rózsaszín). A jobb oldali ábrán 2 kör közös halmazának a metszete látható a pozitív síknegyedben (zöld), és ehhez közelítünk a piros célfüggvénnyel felülről. A feltételes optimalizálás megoldása a zöld halmaz felső csücske.



9. ábra: Körmetszetek különböző középpontú körök esetében
Forrás: saját szerkesztés (2020)

A 9. ábrán egy $[20; 15]$ középpontba eltolt kör és a $[0; 0]$ pontból kiinduló parabola belsejeinek a közös halmazához (narancssárga) közelítünk a lila, zöld és kék célfüggvényekkel. Más-más megoldás tartozik hozzájuk az egyenes iránytényezője alapján. A

9. ábra jobb oldalán a kör középpontja a negatív síknegyedben van, a rózsaszínű közös halmazhoz kell közelíteni a kék egyenesekkel.

Képzelhetjük, ha mindezeket még térbe is kiterjesztenénk. A körök gömbökké, a parabolák forgáskúpokká, a négyzetek és téglalapok hasábokká és azok metszeteivé alakulnak. Tehát még izgalmasabb és érdekesebb térbeli feladatoknak néznénk elébe, amelyekben nehéz megállapítani a közös halmazt, és ahhoz közelíteni egy célfüggvény síkjával. Erre nyújt lehetőséget a 3D GeoGebra, de sok függ az alkotókészségeinktől és képességeinktől is.

6. A geometria és a térlátás elengedhetetlen követelmény

A fenti példák alapján azt kell kijelenteni, hogy a geometria és a térlátás elengedhetetlenül fontos lenne a jövő nemzedék számára mind a közgazdasági, mind az ehhez kapcsolódó, például idegenforgalmi szakokon is, ahol közgazdászok számára íródott matematika a kötelező. A múltban ez nem okozott ekkora problémát, hiszen már az általános iskolákban is volt ábrázoló mértan. Erre épült a középiskolákban az ábrázoló geometria (Pál 1960). Ezek a tantárgyak megalapozták a geometriai térlátást, ezért a merőleges vetítések és a párhuzamosokkal való ábrázolás a hetvenes, nyolcvanas évek tanulóinak nem okozhattak fejtörést. Az ábrázoló geometria segítségével megoldhatóak voltak a térbeli feladatok is, hiszen tanultak axonometriát, metszeteket, párhuzamos vetítéseket, szabályos alakzatokat és térbeli felületeket is. A műszaki jellegű középiskolákban erre épülhetett a műszaki rajz. Az előző generációk térlátását segítette a piros-zöld szemüveggel kialakított ún. térlátásos ábrázoló mértan is. A szem „becsapására” tett kísérlet sikerrel járt, hiszen úgy látszik, mintha az alakzatok térbeliek lennének. Éppen ezt mutatja be Pál Imre könyve, amelyik 1959 óta több kiadásban megjelent, már 1960-ban szlovákra is lefordították (Pál 1960). 1960 óta ezen a nyelven is nagy példányszámban elkelt, és úgyszintén több kiadásban is megjelent.

7. Az idegenforgalmi szakosok matematikatudása

Honnan is tudhatná mindezt egy idegenforgalmi szakos hallgató? Milyen matematikatudással érkezik? Milyenek a mértani, síkbeli és térbeli elképzelései? Melyek az alapvető hiányosságok? A főiskolánkon végzett felméréseink az első évfolyamos hallgatóknál azt mutatják, hogy gondot okoz a kör rajzolása, a sugár és a középpont, valamint az egyenesek és a kör egymáshoz való viszonya is. Mérlegelni kell, milyen típusú középiskolából érkeznek, ami az egységesítéshez szükséges. Be kell ütemezni a tananyagot, bepótolni a hiányosságokat, és megalapozni a számolási, rajzolási és egyéb készségeket.

10. ábra: Az idegenforgalmi szakra érkezők középiskolai végzettsége
Forrás: saját szerkesztés (2020)

Az elmúlt hét év felmérése alapján elmondható, hogy nem úgy alakul a hallgatói összetétel, mint a hetvenes években, amikor is a hallgatók többnyire a gimnáziumokból jutottak be a főiskolákra. A 2019-ben végzett vizsgálat adatai szerint 14%-uk érkezett gimnáziumokból, a legtöbben hotel akadémiákról érkeztek (26%), majd idegenforgalmi (20%) és közgazdasági (16%) szakokról. A hotel akadémia érettségit adó, elsősorban a vendéglátásra és gasztronómiára irányuló középiskola. A hét év alatt volt olyan hallgató is, aki zeneiskolából érkezett, és a középiskolában nem tanult matematikát. Az Ukrajnából érkező diákoknak csak két évig tart a középiskola. A szakosodás tarkasága és az általánosan nagy hiányosságok miatt egyetemünk is úgy határozott, hogy felzárkóztató matematikaórát vezet be mindjárt az első szemeszterbe beépítve. A belépő felmérésekből kiderült, hogy az analitikus geometria fejezeteit több hétre is be kell iktatni, hogy a hallgatók alaposan megértsék a feladatokat. Ennek az az oka, hogy még egyszerűbb feladat megoldására csak a 10 százalékuk vállalkozott, és csak 1–2 helyes megoldás született. A feladatban meg kellett határozniuk egy $S(2;-1)$ és $r = 3$ sugarú kör és a koordinátatengelyek metszéspontját. A későbbiekben beiktattunk egy kockát is (ABCDEFGH csúcsokkal), amelynek meg kellett határozni a metszetét a KLB síkkal úgy, hogy a K az EA él felében van, az L pedig az EH harmadában. Ezzel a feladattal csak a gimnazisták próbálkoztak. Érdekes módon azonban a végtelenről és a paradoxonokról szóló felmérésünk a matematikában és fizikában sokkal inkább felkeltette az érdeklődésüket. Ez azt bizonyítja, hogy a sci-fi iránti érdeklődésük nagyobb, mint a geometria iránti. A későbbiekben is azt tapasztaltuk, hogy inkább 4–5 oldalt is számoltak, mintsem pár vonással megrajzolták volna a feladatokat. Ez sajnos jellemző volt még a gimnazistákra is. Elmondható, hogy a geometriai és egyben a térlátásukat is már az alapiskolákban, az általános iskolákban kellene megalapozni, majd a középiskolákban megfelelő módon és óraszámban fejleszteni, hogy a főiskolán ne okozzon ekkora gondot. Nem csodálkozhatunk, hogy a hallgatók zöme csak többszöri ismétlés után érti meg és kezdi jól értelmezni, miről is szól az optimalizálás.

Összegzés

Már az ötödikesekkel kellene kezdeni a rajzolást, az egyenesek és a síkok és félsíkok értelmezését, a szabályos alakzatok rajzoltatását. Erre épülhetne a geometriailag is bizonyított Pithagorasz tétel, amit csak a kilencedikeseknek tanítanak szlovákiai viszonylatban, míg a fizikában már hetedikes korban szükség lenne erre. A konkrét javaslatunk az lenne, hogy a hetvenes évek jó tapasztalatai alapján vissza kellene térni a régi jó módszerekhez, amelyek megalapoznák az aritmetikai tudást, a szöveges feladatok logikai értelmezését, és a gyakorlatból vett példák alapján kellene fejleszteni a síkbeli problémák megoldását és a térlátást is. Természetesen bevetnénk a modern technika új vívmányait, a programokat, GeoGebrát, 3D Paint rajzoló programokat, stb. Így biztosak lehetnénk abban is, hogy a jövő generáció szakemberei ki fogják tudni számítani a legnagyobb nyereséget, a legkisebb veszteséget és a túlélési eshetőségeinket is.

Köszönetnyilvánítás

A tanulmány a „KEGA 015UKF-4/2020 Development spatial abilities of 10-12-year-old students" projekt segítségével jött létre.

Irodalom

Fecenko J.–Pinda Ľ. 2006. *Matematika 1*. Bratislava: Iura Edition.
Fecenko J.–Sakálová K. 2004. *Matematika 2*. Bratislava: Iura Edition.
Maczák I. 2016. A matematikában botorkáló gyerekek – kérdések és válaszok a diszkalkuliáról. *Új Köznevelés* 72(8): 38–41.
Pál I. 1960. *Deskirptívna geometria videná priestorove*. Budapest: Műszaki Könyvkiadó.
SRPSZKK. 2020. Országos kompetenciamérés – részletek a felmérésről. https://www.srpszkk.hu/tamop412b/kompetencia_alapu_pedagogia/orszgos_kompetenciamrs.html (letöltve: 2020.9.19)
Sydsaeter K.–Hammond P.I. 2006. *Matematika közgazdászoknak*. Budapest: Aula.
Tóth A. 2015. A végtelenül nagy és végtelenül kicsik világa. In: Komzsík A.–Szabó T. (szerk): *Ab igne ignem*. Nitra: FSŠ UKF, 97–107.