A geometriai megoldások új szerepe a gyakorlati példákban

Tóth Attila
Nyitrai Konstantin Filozófus Egyetem, Nyitra

Bevezetés

A műszaki főiskolákon és a közgazdasági szakokon is megjelentek azok a feladatok, amelyek esetében geometriai tudásra, szerkesztési kézügyességre és térlátásra van szükség. A feltételes optimalizálásnál a kétismeretlenes egyenleteket helyettesíthetjük egyenesekkel, egyenlőtlenségeket félsíkokkal, és ezek metszetével. A főfüggvény egyenesével pedig megközelíthető az így nyert alakzat maximális (pl. nyereség), ill. kiadás és költség minimális pontja (Fecenko–Sakálová 2004; Fecenko–Pinda 2006; Sydsaeter–Hammond 2006). A nemlineáris megoldások esetében pedig nemlineáris alakzatok: parabolák, körök külsejét, vagy éppen belsejét vizsgáljuk, hogy hol metszik egymást, és a közös halmazt melyik pontban érinti a főfüggvény. Geometriai úton tehát máris leolvasható az optimális pont $(f^*(x^*,y^*),..)$. Az optimumot (*max/min*) numerikus módon is meg kell határozni, így gyakorlatilag alapos matematikai alapokra van szükségük a hallgatóknak. Éppen ezért mutatkozik meg bizonyos fokú hiányosság, hiszen már a vírushelyzet előtt is megjelentek tanulási nehézségek, és úgy általában a matematikához való viszony is romlott. Ebben a tanulmányban rámutatunk arra is, miért kell megtanulni a másodfokú egyenleteket, az analitikus geometria egyenleteit és egyenlőtlenségeit, a síkok és félsíkok metszeteit, és mi a jelentősége egy-egy metszéspontnak. Hiszen végeredményként a legtöbb esetben ez adja meg az optimális megoldást.

Ebben a tanulmányban arra szeretnénk rámutatni, milyen szerepet vállalhat magára a geometria. Az újszerű matematikai megoldások gyakorlatilag az újkori, tehát az ezredforduló utáni eredmények alapján mutatkoztak meg, és fejlődnek még ma is. Sok esetben mutatnak megoldásokat olyan módszerekkel is szemben, mint a fokozatos behelyettesítés, a simplex, ami nagyon sok ideig tart. Az új megoldások abban rejlenek, hogy az optimalizálás feltételeit matematikai nyelvre fordítjuk, majd algebrai és geometriai úton egyaránt próbáljuk megoldani. Bemutatunk három-négy ilyen példát, amelyek megoldásához geometriai gyakorlat igényeltetik. Míg az ezredfordulóig a numerikus megoldások domináltak, az utóbbi évtizedben egyre inkább tért hódít a geometria. Az első feladat területek arányával fejezi ki két fiatal találkozásának eshetőségeit, ami a statisztikában gyakori jelenség, hiszen terület-integrálszámítás a valószínűségszámítás alapja. A különlegessége a példának éppen a hasonlósága a többi példával, hiszen félsíkok metszetéről van szó mindegyik esetben. A másik feladat a feltételes optimalizálás, amelyhez geometriai megoldást találtunk. A harmadik feladatban bemutattuk, hogy megoldható egy térbeli, 3 változótól függő probléma, a duális formulával és a komplementaritás elvének alkalmazásával. Ehhez azonban jó térbeli orientáció, térlátás is igényeltetik. A geometriai megoldások az egyszerűségük és gyors megoldásuk végett dominálni fognak a numerikus megoldásokkal szemben.

A negyedik és utolsó feladatokban pedig egy teljes négyzetté való alakítás módszerére hívjuk fel a figyelmet, ami megadhatja a más úton számolt optimalizálás végeredményét, de ezen felül a termék mennyiségeinek a mozgásterét is felvázolhatja. A közgazdasági feladatokban éppen a mennyiség és ár kapcsolatát vizsgálgatjuk, de megjelennek az idegenforgalom más területein is ezek a számítási módszerek. A legújabb számításokban a tőke, és az órabér is megjelennek, valamint az összkiadás és egyéb költségek is.

1. Egy statisztikai feladat geometriai megoldása

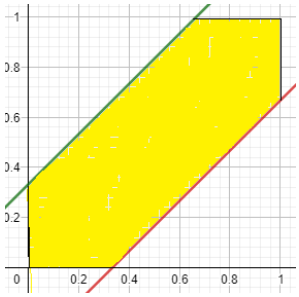
Az első példa statisztikából, egy példaértékű szemléltetés. Miben segítenek a félsíkok, metszetek? Abban, hogy meg tudjuk szerkeszteni pontosan a lehetséges esetek metszetét.

Egy valószínűségszámítási példa a következő: mi az esélye annak, hogy egy fiú és egy lány találkozik. A két személy a megbeszélésük alapján 12 és 13 óra körül szeretne találkozni, és egyforma feltételeket szabnak egymás irányában. Függetlenül egymástól érkeznek, és úgy döntenek, hogy az előbb érkező fél maximálisan 20 percet hajlandó várni (tolerancia) a másikra, miután eltávozik. Mi a valószínűsége annak, hogy találkoznak?

A feladat matematikai felírása a következőképpen alakul: *x, y* az *A* és *B* érkezésének az ideje. $\Omega = \{(x, y)\epsilon R^2; 0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq 1\}$, mivel síkbeli geometriai félsíkkal fogjuk megoldani a feladatot, akkor az egyórás intervallumon belül mozog az *x* és *y* is (20 perc=1/3 óra).

Ha az *A* személy érkezik előbb, $x \leq y$ így $y \leq x + 1/3$. Ha a *B* személy érkezik előbb, $y \leq x$ így $x \leq y + 1/3$, ezt átalakítva $x - \frac{1}{3} \leq y$. Ahhoz, hogy a feladatot meg tudják oldani, először is meg kell rajzolni két egyenest: $y = x + \frac{1}{3}; y = x - \frac{1}{3}$ az első egyenes a felső, a második egyenes az alsó vonal az 1. ábrán.

Ahhoz, hogy megállapítsuk melyik félsíkról van szó, be kell helyettesíteni pl. a $[0; 0]$ pontot. Az egyenlőtlenség jele szerint azt a síkrészt keressük, amely tartalmazza a választott pontot. A mi esetünkben a megoldás a piros egyenes feletti, és a zöld egyenes alatti közös halmaz, de csak a pozitív 1 oldalú négyzet jöhet számításba az $0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq 1$ feltételek alapján. A geometriai megoldása a feltételeknek az egységnyi négyzeten belüli párhuzamosokkal behatárolt hatszög.



1. ábra A két ifjú találkozásának lehetséges feltétele a sárga mező, ami az 1*1 négyzet része
Forrás: saját szerkesztés 2021.

Matematika nyelven a találkozás eshetőségének a halmaza a következőképpen fogalmazható meg: $G = \left\{(x, y) \in \Omega; \mathrm{x} \leq \mathrm{y} \leq \mathrm{x} + \frac{1}{3}; \mathrm{y} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{y} + \frac{1}{3}\right\}$ illetve $G = \left\{(x, y) \in \Omega;\ |x - y| \leq \frac{1}{3}\right\}$.

Az összlehetőség az egész egységnyi oldalú négyzet $m(\Omega) = 1$, ebből a találkozás eshetősége a sárga terület $m(G) = 1 - \frac{2}{3}.\frac{2}{3}$ (Vrábelová–Markechová 2001).

A találkozás valószínűsége $P = \frac{\frac{5}{9}}{1} = \frac{5}{9}$, tehát csak $55{,}55\overline{5}$ százalékos. Amire fel szeretnénk hívni a figyelmet az az, hogy ilyen jellegű területszámításokkal alapozzuk meg a matematikai statisztika alapjait. Ha nem szakaszosan, hanem folytonos függvény segítségével oldunk feladatokat, akkor az egyes intervallumokon éppen a határozott integrál segítségével tudjuk megoldani a feladatokat.

2. A feltételes optimalizálás Lagrange (nemlineáris) módszeres és geometriai megoldása

A következő példa egy feltételes optimalizálásról szóló példa, amihez Karush-Kuhn-Tucker (KKT) feltételek segítségével Lagrange multiplikátorokkal oldanánk meg a feladványt:

$$\min\ (x-1)^2 + (y-3)^2 \begin{cases} x+y \le 2 \\ y \ge x \end{cases};\ x \ge 0; y \ge 0.$$

A Lagrange módszer alapján kialakítjuk a Lagrange egyenletet (Sydsaeter–Hammond 2006): $\mathcal{L} = (x-1)^2 + (y-3)^2 + \lambda_1(x+y-2) + \lambda_2(y-x)$. Az extrém ott található, ahol a Lagrange függvény első deriválása nulla, illetve a KKT feltétele alapján a $\lambda_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0$; illetve $\lambda_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 0$. Ily módon 4 egyenletet kapunk:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2(x-1) + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2(x-1) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1(x+y-2) = 0$$

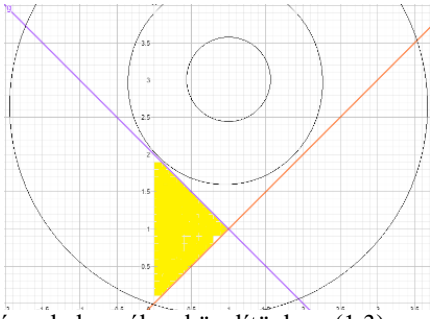
$$\lambda_2(x-y) = 0$$

Természetesen adottak a nem negativitási feltételek: $\lambda_1 \ge 0; \lambda_2 \ge 0; x+y \le 2; y \ge x$. A megoldásokat úgy kell keresni, hogy mérlegelni kell, hogy a feltétel aktív0, vagy inaktív állapotú-e. Eszerint 4 eset lehetséges:

1. $\lambda_1 = 0\,; \lambda_2 = 0$, ebben az esetben rögtön az első két egyenletből azt kapjuk, hogy $2(x-1) = 0; 2(y-3) = 0$, amiből adódna az $x = 1;\ y = 3$ megoldás, de ez visszahelyettesítve ellentmond az $x + y \le 2$ feltételnek. Tehát nem elfogadható megoldás.
2. $\lambda_1 = 0\,; \lambda_2 \ne 0$. Azt kapjuk, hogy: $x - y = 0; 2(x-1) + \lambda_2 = 0; 2(y-3) - \lambda_2 = 0$. Van három ismeretlen, és három egyenlet, amiből az $x = 2,\ y = 2$ és $\lambda_2 = -2$ megoldást kapnánk, ami nem teljesíti a feltételeket.
3. $\lambda_1 \ne 0\,; \lambda_2 = 0$ ez az eset a következő egyenleteket implikálja: $x + y - 2 = 0; 2(x-1) + \lambda_1 = 0;\ -2(x+1) + \lambda_1 = 0$. Ez a megoldás: $x = 0; y = 2$ és $\lambda_1 = 2$ már megfelelő.
4. $\lambda_1 \ne 0\,; \lambda_2 \ne 0$ esetében a következő egyenleteket kapjuk: $x + y - 2 = 0; x - y = 0; 2(x-1) + \lambda_1 + \lambda_2 = 0; 2(y-3) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$, a megoldás pedig $x = 1; y = 1;\ \lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = -2$, ami ismét nem megfelelő.

A négy esetből tehát az egyedüli megoldás a $[0; 2]$ pont. A javasolt geometriai megoldás pedig a feltételekből szabott síkrész. A pozitív síknegyedben dolgozunk. Az $y = x$ egyenes feletti félsík, valamint az $x + y = 2$ egyenes alatti félsíkok metszetét egy szabályos háromszög adja. Az *(x,y)* számpárost csakis a feltételek által megszabott mezőből vehetjük. A főfüggvény pedig az $S = (m, n) = (1,3)$ pontból húzott koncentrikus körökkel szemléltetjük, az így kapott min kör éppen a $[0; 2]$ ponton halad keresztül, a maximális pedig a $[0; 0]$ pontokon. Így szemléltethető a feladat (főfüggvény) $(x-1)^2 + (y-3)^2$ maximális és minimális pontja, ha az adott számpárost a feltételek halmazából vesszük (2. ábra).

$$\min\ (x-1)^2 + (y-3)^2 \begin{cases} x+y \le 2 \\ y \ge x \end{cases};\ x \ge 0; y \ge 0.$$



2. ábra A feltételek sárga halmazához közelítünk az (1,3) pontból húzott körökkel
Forrás: saját szerkesztés 2021.

3. Egy térbeli feladat lineáris programozás geometriai megoldása

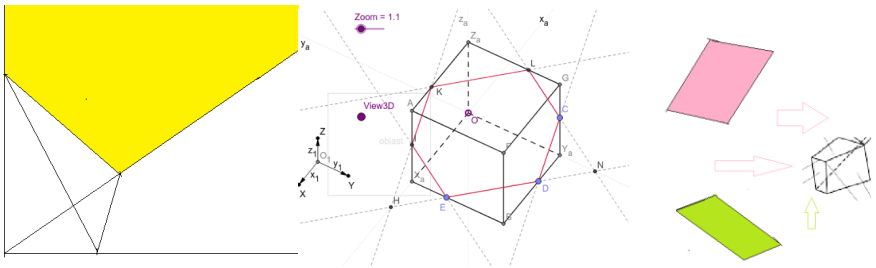
A következő példában a komplementaritás alkalmazását mutatjuk be, miszerint meg lehet geometriai módszerrel oldani térbeli feladványokat is.

Ha egy adott esetben az idegenforgalmi vállalatnak 3 részlege van és a működtetéseinek a feltételeit két egyenlet segítségével vázoljuk fel a fenntarthatóság szempontjából, akkor ez matematikailag így írható fel (Sydsaeter–Hammond 2006):

$$\min 2400u_1 + 3500u_2 + 3600u_3, \text{ ha } \begin{cases} 30u_1 + 70u_2 + 90u_3 \geq 30 \\ 80u_1 + 50u_2 + 40u_3 \geq 30 \end{cases};$$

$u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$ a $u_3 \geq 0$ ami egy térbeli 3D feladvány.

El kell határozni azonban, melyiket éri meg működtetni, és melyik részleget kellene bezárni, hogy a költségeink a minimálisak legyenek. Mivel nem tudjuk ábrázolni a síkok feletti térrész metszetét (mindebben segíthetnének a kocka metszetei), csak a síkokat tudjuk ábrázolni, hol haladnak át az *x,y,z* tengelyeken, mint pl. $u_1 = 0; u_2 = 0$ behelyettesítve az $30u_1 + 70u_2 + 90u_3 = 30$, egyenletbe megkapjuk az $u_3 - at$, hogy a sík a (0;0;0,33) ponton keresztül megy át a *z* tengelyen (($u_3 = \frac{30}{90} = 0{,}333$). Annyit tudunk csupán eldönteni, hogy az egyes síkokban melyik egyenes van felül, és a két egyenes feletti térrészről van szó. Például az *zy* síkban a 3. ábrán látható rószaszín egyenes van felül, így ez a térrész lenne. Majd a következő síkokban is ilyen megfontolásokkal elemzünk, de térbelileg nem tudjuk összerakni ezeket a részeket. A térbeli próbálkozásokkal fejleszthetjük a térlátás képességét is. Ha például könnyen vágható anyagból kifaragunk egy kockát, akkor az egyes oldalaira rá tudjuk vinni a síkbeli alakzatokat, félsíkokat. A kocka egyes oldalain tehát meghatározható, melyik a két egyenes feletti közös halmaz, attól függően, hogy az egyenes alatti (≤), vagy feletti (≥) síkrész az egyenlőtlenség jelétől függően. A lehetséges megoldások halmaza lehet egy úgynevezett konvex poliéder, amelynek a csúcsai az extremális pontok (3. ábra).



3. ábra Bonyolult térbeli feladat
Forrás: saját szerkesztés 2021.

Csakis kockametszetekkel tudnánk megoldani ezeket a feltételeket, majd ha minimalizálási feladatról szólna, akkor alulról közelítenénk a fősíkkal, ha pedig maximalizálási feladatról van szó, akkor felülről közelíthetnénk a fősíkkal a kockametszethez. A matematika új fejezetei azonban a komplementaritás segítségével más lehetőséget is kínálnak.

A térbeli fő feladványt (prím függvény) egy duál megoldás segítségével transzponáljuk síkbelivé. Tehát 3D-ből transzponáljuk 2D-be, majd miután megállapítottuk, hogy melyik feltétel nem befolyásolja a prím optimumát, visszatranszponálunk.

$\min 2400u_1 + 3500u_2 + 3600u_3$, ha a feltételek $\begin{cases} 30u_1 + 70u_2 + 90u_3 \geq 30 \\ 80u_1 + 50u_2 + 40u_3 \geq 30 \end{cases}$

Megkeressük a feltétel baloldalának a mátrixát, ezt transzponáljuk:

$\begin{pmatrix} 30 & 70 & 90 \\ 80 & 50 & 40 \end{pmatrix} \Rightarrow$ a transzponálás után $\begin{pmatrix} 30 & 80 \\ 70 & 50 \\ 90 & 40 \end{pmatrix}$ majd mindezt megoldjuk a duál segítségével, amikor a feladványok eleje és hátulja felcserélődik. Az előjelek is felcserélődnek, tehát ami $\geq$ az $\leq$ lesz.

$\max 30x_1 + 30x_2$, ha a feltétel $\begin{cases} 30x_1 + 80x_2 \leq 2400 \\ 70x_1 + 50x_2 \leq 3500 \\ 90x_1 + 40x_2 \leq 3600 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Az első feltétel az *f* egyenes, a másik feltétel a *g* és a harmadik a *h* egyenes segítségével ábrázolható, az egyenesek alatti közös halmaz pedig csakis az *f* és *h* alatti terület. A *g* egyenes tehát nem befolyásolja a félsíkok metszetét, így a kettes egyenes ún. rejtett értéke nulla. A komplementaritás elve alapján ezért a prím feladvány második paramétere ($u_2 = 0$) nulla kell, hogy legyen. De elsősorban meg kell állapítani a transzponált feladat optimumát (amit csillaggal jelölünk*). Ha a főfüggvény által meghatározott párhuzamosokkal közelítjük meg a három feltétel közös halmazát, láthatóan a *p* egyenes éri el egy pontban ezt a halmazt. Ez a pont pedig az *f* és *g* metszéspontja (4. ábra).

4. ábra az *f,g,h*-val jelzett egyenesek alatti félsíkok közös halmazához közelítünk párhuzamosan *p,r*-el
Forrás: saját szerkesztés 2021.

$$30x_1 + 80x_2 = 2400$$
$$90x_1 + 40x_2 = 3600$$

Az egyenletpáros megoldása $x_1^* = 3{,}2$ és $x_2^* = 1{,}8$. Behelyettesítve a főfüggvénybe:

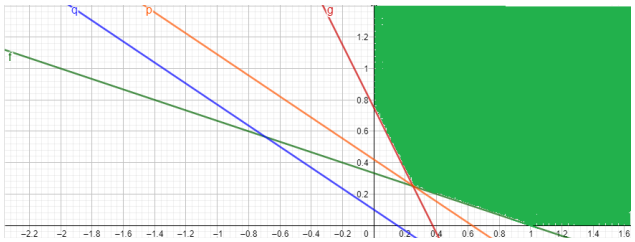
$f^* = 1500$ értéket kapunk.

Az ezredforduló utáni új matematikai fejezetek segítségével tehát megoldható a 3D, hiszen ezt a megoldást visszatranszponáljuk az eredeti feladványba azzal, hogy megállapítottuk, hogy az $u_2 = 0$, a $\min 2400u_1 + 3500u_2 + 3600u_3$, ha a feltétel $\begin{cases} 30u_1 + 70u_2 + 90u_3 \geq 30 \\ 80u_1 + 50u_2 + 40u_3 \geq 30 \end{cases}$

A feladat redukálódik 2D síkbelivé:

$\min 2400u_1 + 3600u_3$, ha a feltétel $\begin{cases} 30u_1 + 90u_3 \geq 30 \\ 80u_1 + 40u_3 \geq 30 \end{cases}$

Ami már sikeresen megoldható a síkban, ismét a két egyenes $(30u_1 + 90u_3 = 30; f)$ és $(80u_1 + 40u_3 = 30; g)$ feletti közös síkrész meghatározásával jön létre a feltételek értelmezési közös halmaza (5. ábra).



5. ábra Az *f,g* félsíkok közös metszetéhez közelítünk a fő függvénnyel párhuzamosokkal (*p,q*)
Forrás: saját szerkesztés 2021.

Ehhez a halmazhoz közelítünk alulról a főegyenessel párhuzamosokkal (*p,q*), így alulról elérve a közös halmaz első pontját megkapjuk a prím feladat optimumát, ami a minimális költséget jelenti. A feladat tényszerűen megállapítja egy idegenforgalmi vállalatnál, hogy melyik részleget kell és meddig üzemeltetni, és melyiket kell pl. éppen a fűtés miatt csak kis lángon temperálva fenntartani, de bezárni télire.

$$30u_1 + 90u_3 = 30 \ (1)$$
$$80u_1 + 40u_3 = 30 \ (3)$$

Mivel a kettes egyenes kinullázódik a komplementaritás elve végett, a megoldás a fő feladat (1) és (3) egyeneseinek a metszéspontja. A számítás csak megerősíti az ábrából is leolvasható értékeket, miszerint: $u_1^* = 0{,}25$ a $u_3^* = 0{,}25$.

A főfüggvény minimalizálásának a megoldása tehát a behelyettesítés után (*f**): $\min 2400u_1 + 3500u_2 + 3600u_3 = 2400 * 0{,}25 + 3500 * 0 + 3600 * 0{,}25 = 1500$.

Ezek a geometriai megoldások nagyom igényesek, sok esetben igényeltetik a nagyítás és kicsinyítés, valamint roppant érzékeny éppen a főfüggvény iránytényezőjére. Sok esetben pl. hozzá is simulhat egy-egy szakasz részhez, ebben az esetben a megoldás a szakasz összes pontja.

4. Monopolista és monopszonista esetek geometriai felvázolása

A monopolista helyzetben levő vállalatok meghatározhatják, hogy ugyanazon az áron árusítják a termékeiket vagy különböző árakon. Például a termékmennyiségtől *(Q)* függően így határozhatják meg az egyes országokban az árakat, miközben a befektetés, vagy kiadás a következő egyenlettel adható meg:

$C = 6Q = 6Q_1 + 6Q_2$, a különböző árak pedig (Fecenko–Sakálová 2004):

$P_1 = 40 - Q_1 \ ; \ P_2 = 30 - Q_2$

Ebből a nyereség a termék mennyiségét beszorozzuk az árral, ez lenne a bevétel, miszerint: $\pi = P_1Q_1 + P_2Q_2 - 6C = 40Q_1 - Q_1^2 + 30Q_2 - Q_2^2 - 6Q_1 - 6Q_2$

A matematika egyes fejezeteiben találjuk az ún. teljes négyzetté való átalakítást, amit a középiskolás módszerekkel bizonyítottunk *x,y* számpáros segítségével:

$$x^2 - 34x + 289 + y^2 - 24y + 144 = 433.$$

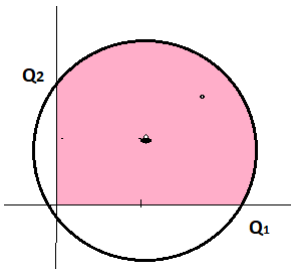
Ez pedig egy kör, amelyik akkor lesz a legnagyobb, amikor a sugarát éppen a $(17{,}12)$ pontba helyezzük, bármely más pontban kisebb lesz, és a sugara 20,808. A klasszikus megoldás pedig:

$$\pi'(Q_1) = 34 - 2Q_1$$
$$\pi'(Q_2) = 24 - 2Q_2$$

és akkor lesz stacionárius pontja, ha az első deriváció nulla, ez pedig a $(Q_1, Q_2) = (17{,}12)$ helyen van. A maximális nyereség pedig akkor van, amikor a következő összefüggés pozitív

$$\pi''_{Q_1Q_1}.\pi''_{Q_2Q_2} - \pi''_{Q_1Q_2} = (-2)(-2) - 0 = 4.$$

Ami az előbbi geometriai megoldás előnye lehetne az az, hogy korlátozza, illetve grafikusan meghatározza a mozgásterünket (6. ábra).



6. ábra A (17,12) középpontból szerkesztett kör, és a Q_1; Q_2 mozgástere
Forrás: saját szerkesztés 2021.

A feltételes optimalizálásnál sokfajta példát lehet előállítani (Hamala 1972; Gass 1972), amelyeknek a megoldásai numerikusak. Nézzük meg a geometriai megközelítést is. Ha pl. a körök segítségével behatárolható a mozgásterünk, akkor egy célfüggvény segítségével közelíthetünk a pozitív síknegyedben egy kör és egy parabola közös halmazához. A célegyenes iránytényezőjének, meredekségének a változásával pedig ecsetelhetjük, hogy az optimális megoldás is változhat.

A következő példában egy korridor kialakítására mutatunk rá, mégpedig a határesetek, a határhajlandóság, illetve a termelés által kialakított legalsó nem átléphető szinttel tudjuk behatárolni. Ha egy termelési függvény az alábbi egyenlettel írható le:

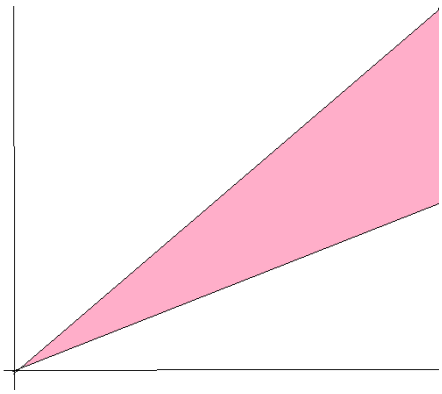
$$f: z = 5xy - x^2 - 3y^2,$$

akkor a marginális összetevőire pedig a deriváltjaik egyenlőtlenségeit kell megvizsgálni:

$$MPD_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 5y - 2x \text{ és } MPD_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 5x - 6y.$$

Ezeknek az összetevőkre jellemző, hogy emelkedő tendenciát kell mutassanak, miszerint

$$5y - 2x \geq 0 \text{ és } 5x - 6y \geq 0.$$

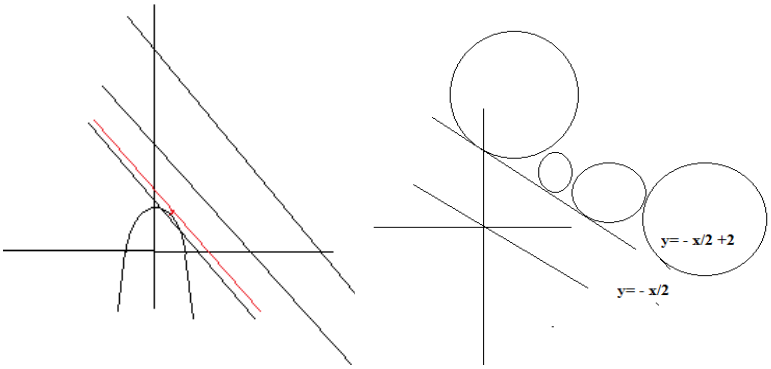


7. ábra A 0,83 és 0,4 iránytényezőjű egyenesek közé beékelt korridor
Forrás: saját szerkesztés 2021.

Így alakul ki az a térrész (korridor), eszerint ilyen határok között kell mozogni az egyes termelési paraméterekkel, hogy a termelés fenntartható legyen. Tehát a két félsík metszete egy korridort ad (7. ábra).

5. Egyéb geometriai alkalmazások

A 8. ábrán két rajz található, a baloldalin a feltételek parabolájához közelítünk a célfüggvény egyeneseivel, a jobboldalin egy egyenes számpárosai segítségével számított pontokból rajzolunk fel köröket, melyik számpárosnál lesz a legkisebb sugarú kör.



8. ábra Egy parabolához közelítünk párhuzamosokkal, illetve egy egyenes számpárosaiból kialakított körök közül melyik lesz a legkisebb sugarú kör ($x^2 + y^2 = r^2$)
Forrás: saját szerkesztés 2021.

A gyakorlatból vett példák nincsenek logikai sorrendben feltüntetve, hiszen csak a geometriai megoldásuk hasonlít egymáshoz. Ez annyit jelent, hogy az egyenlőtlenségek geometriai megoldása félsík vagy síkrész (például a kör vagy parabola belseje). A példákban éppen a matematikai nehézség van fokozva, illetve a végén említett példákkal pedig rámutatunk, hogy a gyakorlatban az ár-mennyiség feltételei is meghatározhatók mértani úton.

Összegzés

A tanulmányban rámutattunk, milyen jelentőséggel bír a lineáris és nemlineáris feladatok megoldásánál a geometria. Mindig ráakadunk újszerű matematikai megoldásokra, így fejlődik ez a szakterület is. Tehát nemcsak a numerikus megoldások fejlődnek, hanem a mértani szemléltetésük is. Ezáltal egyszerűbb, gyakorlatiasabb végeredményekhez is juthatunk. Szükségeltetik azonban fejleszteni a geometriai képességeket, a térlátást is a hallgatóknál.

Bemutattunk három olyan példát, amelyek megoldásához egyszerűbb és kézenfekvőbb geometriai módszert alkalmazni. Az első feladat területek arányával fejezi ki két fiatal találkozásának eshetőségeit, ami a statisztikában gyakori jelenség, hiszen terület-integrálszámítás segítségével számoljuk az esetek valószínűségét. A különlegessége a példának éppen a többi példával való hasonlósága, hiszen mindegyik esetben félsíkok metszetéről van szó. A második feladat a feltételes optimalizálás, amelyhez geometriai megoldást találtunk. A harmadik feladatban bemutattuk, hogy megoldható egy térbeli, 3 változótól függő probléma, a duális formulával és a komplementaritás elvének alkalmazásával. Ehhez azonban jó térbeli orientáció, térlátás is igényeltetik. A geometriai megoldások az egyszerűségük és gyors megoldásuk végett dominálni fognak a numerikus megoldásokkal szemben.

A negyedik fejezetben pedig a nyereségfüggvény algebrai és geometriai megoldását mutattuk be, illetve a lehetséges értékek mozgásterét. Tulajdonképpen a marginális

együtthatók határértékének a segítségével állapítható meg a korridor, ami gyakorlatilag mértani úton megszerkesztett 2 félsíkkal körbezárt közös halmaz.

Rámutatunk egyéb geometriai alkalmazásokra is (5. fejezet). Mindezek végett azonban azt kell javasolnunk, hogy a középiskolákban meg kell jobban alapozni a geometriai tudást (Nagy 2021), hogy azon hallgatók, akik közgazdasági és idegenforgalmi jellegű főiskolára jelentkeznek, nem feltételezik, hogy nehéz matematikával és geometriai szerkesztésekkel kell foglalkozniuk majd.

Köszönetnyilvánítás
A tanulmány a KEGA 015UKF-4/2020 *Development spatial abilities of 10–12-year-old students* projekt segítségével jött létre.

Irodalom

Fecenko, J.–Pinda, Ľ. 2006. *Matematika 1*. Bratislava: Iura Edition, 65.
Fecenko, J.–Sakálová, K. 2004. *Matematika 2*. Bratislava: Iura Edition, 81: 59–61.
Gass, S. I. 1972. *Lineárne programovanie,* Bratislava: Alfa, 47.
Hamala, M. 1972. *Nelineárne programovanie,* Bratislava: Alfa, 47, 231.
Nagy L. Zs. 2021. *Záhadný svet čísel*, Nitra: UKF, 68–78.
Sydsaeter, K.–Hammond, P.I. 2006. *Matematika közgazdászoknak*. Budapest: Aula, 641–665.
Vrábelová, M.–Markechová, D. 2001. *Pravdepodobnosť a štatistika* Nitra: UKF, 24.