Félreértés vagy megértés?

Bagota Mónika – Pintér Marianna – Kulman Katalin – Ökördi Réka
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest

Bevezetés

Az ELTE TÓK Matematika Tanszéke a 2016/17-es tanévben az első évfolyamos tanító szakos hallgatók számára egy új tantárgyat vezetett be Matematikai praktikum néven. Azért hoztuk létre a kurzust, mert azt tapasztaljuk, hogy a hallgatók matematikai tudásszintje sokszor olyan területeken hiányos, amelyekre későbbi tanítói munkájuk során feltétlenül szükségük lesz majd. Úgy véltük, hogy a Matematikai praktikum kurzuson nem kell minden hallgatónak részt vennie, csupán azoknak, akiknek a szóban forgó matematikai ismeretei valóban hézagosak. Ezért a tanulmányaikat megkezdő tanító szakos hallgatóknak egy matematikai szintfelmérőt kell megírniuk, és ennek eredménye alapján döntjük el, hogy kiknek kell a kurzusra járniuk (Bagota–Szitányi 2018).

Mivel a gyengébb matematikai teljesítmény mögött sok esetben a szövegértés nehézségeit feltételezzük, az idei mérésben a szöveges feladatok megoldásait e szempont alapján megvizsgáltuk. Ebben a tanulmányban az első évfolyamos hallgatóink szöveges feladatokban alkalmazott megoldási stratégiáit mutatjuk be, valamint az e feladatokban elért eredményeket hasonlítjuk össze.

1. Szakirodalmi áttekintés

A matematika tanulásának legfontosabb céljai közé tartozik, hogy a tanuló „fejlessze a szövegértését, a szövegalkotó és absztrakciós képességét a matematika nyelvének és szimbólumainak szóbeli és írásbeli alkalmazása során”, továbbá, hogy „alkalmazható tudásra tegyen szert” (Nemzeti alaptanterv (NAT) 2020: 328). Ezekkel a gondolatokkal összhangban van Wyndhamn és Säljö (1997: 30) meghatározása is, mely szerint „a modern matematikatanítás fő célkitűzése, hogy felkészítse az embereket az ún. való életből vett feladatok megoldására”. „Ambrus András és Vancsó Ödön ezeknek a feladatoknak megfelelően a »gyakorlatorientált« jelzőt vezették be a magyar köztudatba, az egyoldalúan csak elméleti, absztrakt matematikaoktatással szemben” (Kelemen 2006: 58).

Pólya (2000: 25) a feladatok megoldásának lépéseit négy részre bontja: „I. Értsd meg a feladatot! II. Keress összefüggést az adatok és az ismeretlen között! Ha nem találsz közvetlen összefüggést, nézz segédfeladatok után! Végül készítsd el a megoldás tervét! III. Hajtsd végre tervedet! IV. Vizsgáld meg a megoldást!” Az első lépés során a tanulónak fel kell ismernie, hogy mi az, amit az adott feladatban keresünk, ehhez értelmezni kell a feladatot, és rendszerezni a benne szereplő adatokat. A második lépés a terv készítése, melynek során kapcsolatokat kell keresni a meglévő és az ismeretlen adatok között. Ennek a lépésnek a végrehajtásához elengedhetetlen a feladat pontos értelmezése és megértése. A harmadik lépés a terv végrehajtása, ahol fontos a műveletek helyes elvégzése. A negyedik lépés a megoldás vizsgálata, vagyis az eredmény ellenőrzése. Wyndhamn és Saljö (1997) megfogalmazzák, hogy a szöveges feladatok megoldásakor a probléma sok esetben abból fakad, hogy a tanulónak a feladat közben különböző nyelvi és szimbólumrendszerek között kell mozognia.

A feladatmegoldási modelleket leíró kutatások kétféle problémamegoldó eljárást különböztetnek meg: az egyik a közvetlen transzlációs eljárás, a másik a

problémareprezentáció. Direkt vagy közvetlen transzlációs stratégia az az eljárás, „amikor az integrálási folyamatban a megoldó tartalmilag kivonatolja (kiragadja) azokat a számokat és kulcskifejezéseket, amelyek a végrehajtáshoz az aritmetikai műveleteket megalapozzák" (Kontra 2001: 6). A kutatások azt igazolták, hogy akik ezt az eljárást használják, inkább a sikertelen problémamegoldók körébe tartoznak (Kelemen 2004). Gyakrabban adnak helyes választ a feladatra azok, akik a problémában leírt szituáció megértésére, majd annak modellezésére törekednek, azaz a problémareprezentáló eljárást alkalmazzák.

„A szöveges feladatokkal való munkának az alsó tagozaton alapvetően két fő funkciója van. Az egyik szerepe a műveletek értelmezésében található. A másik szerepét a problémamegoldó gondolkodás fejlesztésében, a matematizálás, modellalkotás területén végzett munkában tölti be" (C. Neményi–Szendrei 2010: 213). Ugyanakkor tapasztalataink alapján a szöveges feladatokhoz tartozó különféle megoldási stratégiák alkalmazhatósága nem tudatosul a hallgatók számára (Csíkos et al. 2012).

2. Módszertan

2.1. Minta

A felmérésben 146 elsőéves, tanító szakos hallgató vett részt (1. táblázat). A nappali tagozatos hallgatók jellemzően a középiskolából közvetlenül érkeztek az egyetemre, a levelező tagozatos hallgatók többnyire munkavégzés mellett végzik a tanulmányaikat. Mivel a nemek aránya – a tanítóképzésre országosan jellemző módon – nem kiegyenlített, az elemzés során a minta ezen megoszlását nem vettük számításba.

1. táblázat A résztvevők eloszlása nemek és képzési forma szerint

	Nappali tagozat	Levelező tagozat	Összesen
Nő	88	41	**129**
Férfi	10	7	**17**
Összesen	**98**	**48**	

Forrás: saját szerkesztés 2021.

2.2. Eszköz

A szintfelmérő dolgozat 60 itemből állt, amelyet két altesztre bontottunk: egy 20 kérdéses, feleletválasztó tesztre és négy szöveges feladatból álló egységre. A teszt 20 iteme 1 vizsgapontot jelentett itemenként. A szöveges feladatok mindegyike 10 itemből állt. A megoldás során 1 item volt egy helyes elvi lépés, és további itemet jelentett a lépéshez kapcsolódó aritmetikailag is hibátlan feladatmegoldás. Amennyiben a hallgató egy hibás eredmény alapján számolt tovább a következő – helyes – elvi lépés megtétele után, és az így kapott eredménye hibátlan volt, úgy az adott aritmetikai művelethez kapcsolódó itemre megkapta a pontot. Az itemek alapján készített pontozási táblázatban a 10 itemre adható pontokat 5 vizsgapontra váltottuk át, így a teljes feladatlap összpontszáma 40 pont volt, melyből 20-at lehetett elérni a tesztfeladatok, 20-at pedig a szöveges feladatok megoldása során.

A teszt feladataiban a hallgatóknak négy válaszlehetőségből kellett kiválasztaniuk az egyetlen jó megoldást. A helytelen válaszlehetőségek között minden esetben olyan – a matematikai fogalmak pontatlan ismeretéből adódóan, az elsőévesek számára hihetőnek tűnő – megoldások szerepeltek, amelyek számolási hibából vagy a nem megfelelő szövegfeldolgozásból fakadhatnak.

A négy szöveges feladat megoldása során a hallgatóknak az eredmények közlése mellett a gondolatmenetüket, a feladat minden elvi lépését is rögzíteniük kellett.

A feladatlap összeállításakor figyelmet fordítottunk arra, hogy lefedjük az alsó tagozatos matematika tananyagának nagyobb témaköreit. A dolgozatban szereplő feladatok kiválasztásánál ügyeltünk arra is, hogy szerepeljen olyan feladat, amelynek

- modellje számfeladat vagy nyitott mondat;
- megoldása egy vagy esetleg több szám, számpár vagy adat;
- esetében egy vagy több lépésben kereshető a válasz;
- megfogalmazása egyenes szövegezésű vagy fordított szövegezésű (C. Neményi–Szendrei 2010).

A szöveges feladatok, témájukat tekintve a törtszámokkal (1. ábra), geometriai ismeretekkel (2. ábra), logikai problémákkal (3. ábra), sorozatokkal (természetes számokkal) (4. ábra) kapcsolatos tudást, a matematikai fogalmak pontos ismeretét és nem utolsó sorban a szövegértést vizsgálták.

Katáék négy napos gyalogtúrán vettek részt. Az első nap megtették az egész út hatodát, a második napon pedig az első napon megtett út kétszeresét. Harmadik nap 10 km-t gyalogoltak, így a negyedik napra már csak az egész út harmad része maradt.

a) Az egész út hányadrészét tették meg a második napon?

b) Az első és a második napon összesen hányadrészét tették meg az egész útnak?

c) Az egész út hányadrészét tették meg a harmadik napon?

d) Hány kilométer hosszú volt a négy napos gyalogtúra?

e) Hány kilométert tettek meg a második napon?

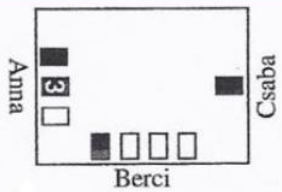
1. ábra 1. szöveges feladat
Forrás: saját szerkesztés 2021.

Egy téglalap alakú játszótér egyik oldala kétszerese a szomszédos oldalának. A teret 1 m széles járda szegélyezi, amit 106 darab, 1 m oldalú négyzet alakú lappal fedtek be.

Hány méteresek a játszótér oldalai?

2. ábra 2. szöveges feladat
Forrás: saját szerkesztés 2021.

Anna, Berci és Csaba olyan kártyával játszanak, amelyben 4 fehér színű (az egyik oldalán 1-től 4-ig sorszámozott) és 4 fekete színű (az egyik oldalán szintén 1-től 4-ig sorszámozott) lap van. A játék kezdetén mind a három játékos maga elé rakta a saját lapjait számmal lefelé vagy felfelé fordítva úgy, hogy bármelyik két lapja közül a jobb oldalin legalább akkora szám volt, mint a másikon (lásd ábra).



a) Hány olyan lap van, amelyről biztosan tudható, hogy milyen szám van rajta?

b) Adja meg az összes lehetséges megoldást!

3. ábra 3. szöveges feladat
Forrás: saját szerkesztés 2021.

Julcsi kosarat fon, a kosár alja 25 cm széles. A kosár az alja felett 15 sorból áll, és felfelé haladva minden sor 4 cm-rel szélesebb, mint az alatta levő. (Az első sor is 4 cm-rel szélesebb a kosár aljánál.)

a) Hány centiméter széles a kosár az alja feletti második sornál?

b) Hány centiméter széles a kosár a 6. sornál?

c) Hány centiméterrel szélesebb a 7. sor a 3. sornál?

d) Hányadik sor lesz 65 cm széles?

e) Hány cm széles az elkészült kosár?

4. ábra 4. szöveges feladat
Forrás: saját szerkesztés 2021.

2.3. Eljárások

A 2021/22-es tanévben a pandémiás helyzetre való tekintettel hallgatóink dolgozatukat a kijelölt időben, az általuk választott helyen, online, a Moodle e-learning platformon írták. A dolgozat megnyitása egy 80 perces idősávon belül volt lehetséges, ezen belül a hallgatók a dolgozatot bármikor elkezdhették, annak megírására 70 perc állt rendelkezésre. A dolgozatot minden hallgató az idősáv első 10 percében megkezdte, így mindegyikük számára biztosított volt a 70 percnyi teljes időtartam a munkára. A dolgozat egyes feladatai között a hallgatók bármikor előre- és visszaléphettek, megoldásaikat bármilyen sorrendben rögzíthették, és a teszt befejezéséig bármikor módosíthatták. A teszt lezárását a rendszer erre vonatkozó kérdésének megerősítésével tehették meg.

3. Eredmények

3.1. Összefüggések

A képzési formák, azaz tagozatok szerinti összevetéshez kétmintás t-próbát végeztünk (2. táblázat). A két csoport teljesítménye között sem a teszt, sem az altesztek, sem a kifejtős feladatok szintjén nincs szignifikáns különbség. Azaz a képzési forma megválasztása nem befolyásolja a teszten elért eredményt. Mivel a szintfelmérő dolgozat a hallgatók hozott tudását méri fel az egyetemre való belépéskor, érdemes lenne kutatni azokat a háttérváltozókat, amelyek magyarázó erővel szolgálnak ahhoz, hogy a két tagozat eredményei nem mutatnak szignifikáns eltérést, holott a hallgatók életkorban és tanulmányi, illetve szakmai tapasztalatban is különböznek egymástól. Az eredmények rámutatnak arra is, hogy a tanítóképzés során nagyon tudatosan kell segítenünk a hallgatókat abban, hogy az alsó tagozatos matematika feladatok megoldásában szerzett jártasság és az ehhez szükséges gondolkodási képességek mindannyiukban hosszú távon is felhasználható tudássá érjenek.

2. táblázat A nappali (N=98) és a levelező (N=48) tagozatos hallgatók eredményei

Teszt	*Paraméterek*	*Képzési forma*		*Kétmintás t-próba*	
		nappali	*levelező*	*|t|*	*p*
Teljes teszt	Átlag (%)	70,95	71,23	0,090	0,928
	Szórás	16,66	19,95		
Feleletválasztó teszt	Átlag (%)	80,26	80,73	0,195	0,846
	Szórás	11,87	14,62		
Szöveges feladatok	Átlag (%)	61,65	61,74	0,019	0,985
	Szórás	25,89	27,86		
Törtszám feladat	Átlag (%)	3,51	3,69	0,494	0,623
	Szórás	2,072	2,023		
Geometria feladat	Átlag (%)	2,63	3,08	1,117	0,267
	Szórás	2,24	2,35		
Logika feladat	Átlag (%)	2,23	1,78	1,184	0,240
	Szórás	2,20	2,21		
Sorozat (természetes szám) feladat	Átlag (%)	3,96	3,81	0,530	0,597
	Szórás	1,69	1,56		

Forrás: saját szerkesztés 2021.

Szignifikáns pozitív korreláció figyelhető meg a geometria és a törtek, a geometria és a logika, illetve a törtek és a logika feladatok között (3. táblázat). A korrelációs értékek alapján az egyes feladatok között gyenge vagy közepes korrelációt találtunk, legerősebb a kapcsolat a geometria és a törtek témakört vizsgáló feladatok esetén. Úgy tűnik, a két területen való magabiztos tudás vagy az e területeken szerzett hiányosságok sokszor együtt járnak. A sorozatokkal kapcsolatos feladat ebből a szempontból nem mutat összefüggést a többi feladattal. A feladatokat megvizsgálva láthatjuk, hogy a négy feladat közül ennek a szövege a leghétköznapibb. A feladat szövegén belül a zárójelben lévő magyarázó mondat (*Az első sor is 4 cm-rel szélesebb a kosár aljánál*) ezen felül további segítséget nyújt a szöveg pontos megértéséhez. A szöveg megértése után pedig pusztán aritmetikai ismeretek segítségével, illetve egy alkalmas képlet megkeresésével és alkalmazásával megoldható a feladat.

3. táblázat Korrelációk a szöveges feladatok között ($p < 0,05$)

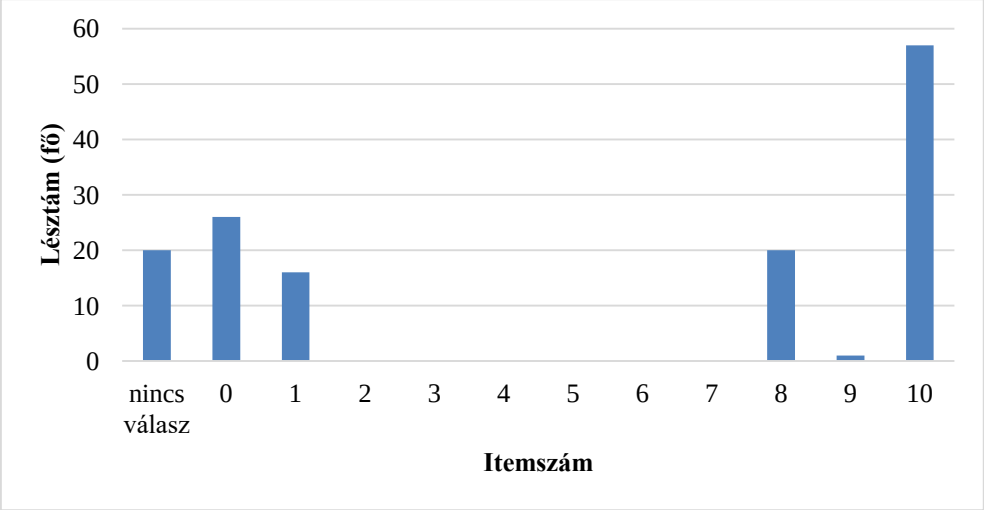
	Törtek	Geometria	Logika	Term. számok
Törtek	1			
Geometria	0,430	1		
Logika	0,188	0,326	1	
Sorozat	-	-	-	1

Forrás: saját szerkesztés 2021.

Azt a hipotézist, miszerint a nem megfelelő szövegértés lehet az oka a feladatmegoldás sikertelenségének, a feladatokon elért eredmények eloszlása alátámasztani látszik. Tekintsük meg a két legkevésbé sikeres feladaton elért teljesítmény eloszlását! Az eloszlást ezúttal – majd a következő feladatok esetén is – az itemek szintjén adjuk meg, nem pedig az 1–5 skálán, amely a vizsgapontra átszámítás eredményeként a dolgozat értékelésében megjelent. A 10 fokozatú Likert-skála esetén jól kirajzolódik mindaz, amit az elvi megoldásokkal és az aritmetikai műveletekkel kapcsolatban alátámasztani kívánunk.

A geometria feladat eredményeinek eloszlásában (5. ábra) szembetűnő, hogy senki nem teljesített 2 és 7 item között. A pontozási útmutató szerint minden egyes elvi lépést és minden egyes helyes számítást pontoztunk. Az itemszámok alapján azt láthatjuk, hogy aki az elvi

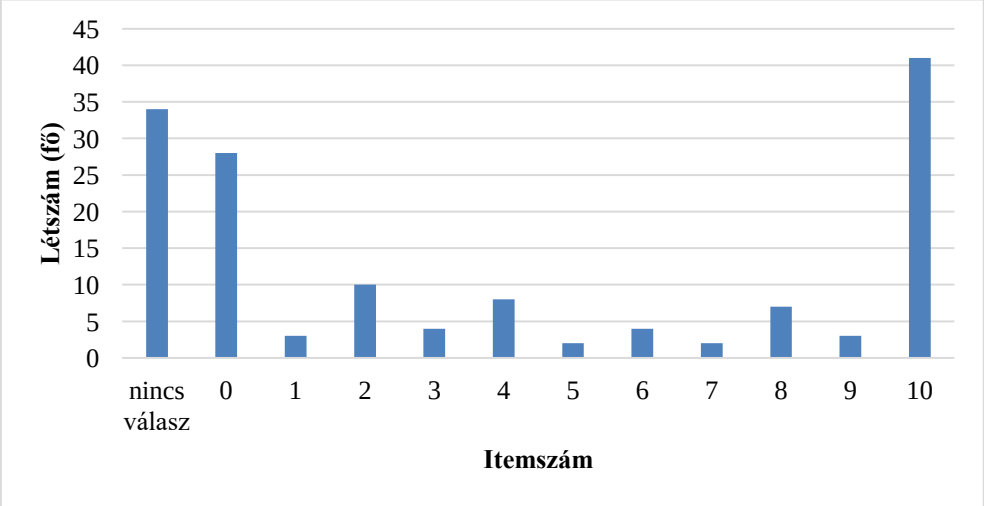
lépéseket megteszi, azaz a szöveget megérti, és a problémát megfelelően vizualizálja, az a számításban már nem, vagy csak nagyon ritkán téved, azaz nem az aritmetikai műveletvégzés terén mutatnak hiányosságot az elsőéves hallgatók.



5. ábra A geometria szöveges feladat eredményeinek eloszlása
Forrás: saját szerkesztés 2021.

A logika témakörét felölelő feladat megoldása során a hallgatók a 10 itemből átlagosan 4,16 itemet oldottak meg. A megoldás szélsőségeit jól mutatja, hogy míg a hallgatók 28%-a hibátlanul oldotta meg a feladatot, addig 23,3% hozzá sem kezdett, 19,2% pedig elvi hibásan oldotta meg azt (6. ábra).

Ahhoz, hogy a feladatban látott és olvasott üzenetet jól kódoljuk, nélkülözhetetlen a képi szövegértés és a logika területeinek együttes használata. Az eloszlásból látszik, hogy aki a szöveget megértette, az az összes eset megtalálásában szinte kivétel nélkül hibátlanul teljesített. Azaz nem a kombinatorikai gondolkodás nem megfelelő szintje, hanem a szövegértés nehezítettsége vezethetett ahhoz, hogy kiugróan magas legyen azon hallgatók aránya, akik nem tudtak itemet megoldani.

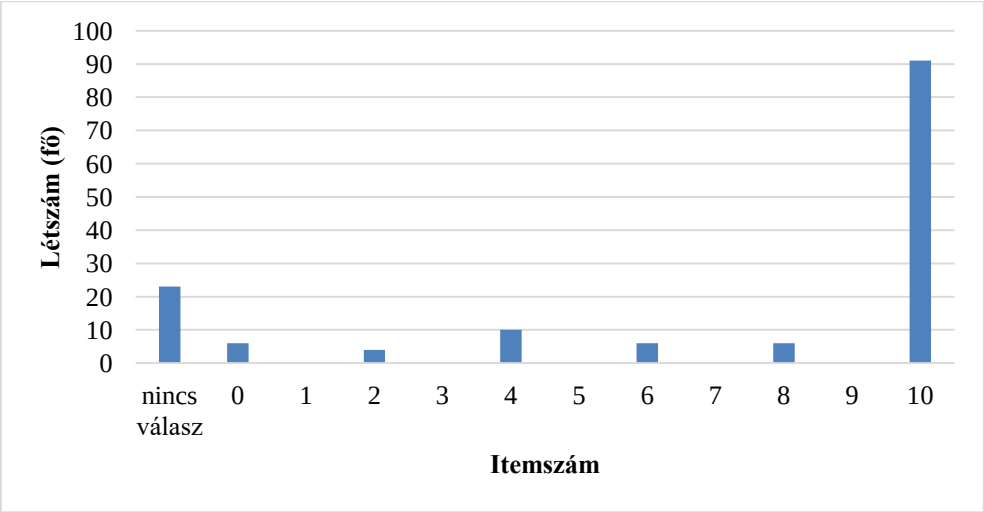


6. ábra A logika szöveges feladat eredményének eloszlása
Forrás: saját szerkesztés 2021.

A törtekkel foglalkozó feladat esetében a hallgatók a 10 itemből átlagosan 7,16 itemet oldottak meg. Az eredmények eloszlásából (7. ábra) kiderül, hogy ha a hallgató nekikezdett az

adott feladatnak, és a kérdést megértette, akkor megfelelően vizualizálta a problémát, és jellemzően aritmetikai hibát már nem vétett. Ennek következtében a hallgatók 62,3%-a hibátlanul oldotta meg a feladatot.

Azonban megközelítően a résztvevők harmada az átlagszint alatt teljesített. Kiemelkedően magas (16%) azok aránya, akik el sem kezdték megoldani a feladatot. Ez felveti annak szükségét, hogy a továbbiakban célszerű lenne vizsgálni, vajon szövegértési nehézség miatt nem láttak hozzá a megoldáshoz, vagy a matematikai tartalom ismeretének hiánya okozott gondot, esetleg mindkét ok fennállt.

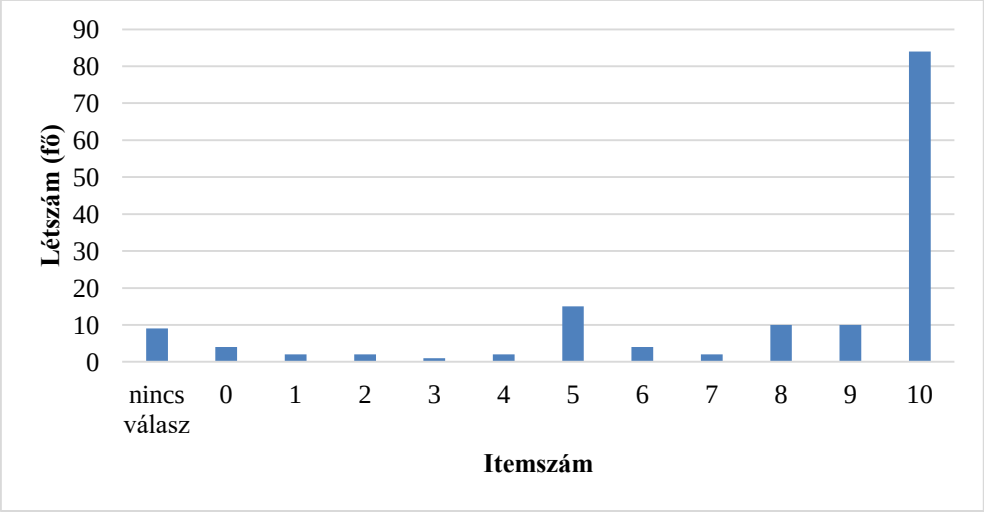


7. ábra A törtekkel kapcsolatos szöveges feladat eredményének eloszlása
Forrás: saját szerkesztés 2021.

A természetes számokkal (sorozatokkal) foglalkozó feladat megoldása során a hallgatók a 10 itemből átlagosan 7,81 itemet oldottak meg (8. ábra). Ha valaki megértette a feladatot, akkor jellemzően vagy hibátlanul számolt, vagy egy-két számolási hibát vétett. A dolgozatírók 57,5%-a hibátlanul oldotta meg a feladatot.

Ezzel szemben mindössze 8,9% volt, aki vagy nem kezdett hozzá a feladathoz, vagy teljesen félreértette azt, és így nem, vagy alig ért el pontot a megoldás során. E feladat esetén a legkisebb azon hallgatók aránya, akik hozzá sem kezdtek a feladathoz. Korábban már utaltunk rá, hogy e feladat szövegének megértése okozhatta a legkevesebb gondot, ugyanakkor érdemes lenne feltárni, hogy a válaszadás hiánya szövegértési nehézségre vagy egyéb problémára vezethető-e vissza.

A részpontszámot elért hallgatók azokat a részfeladatokat, amelyekre válaszoltak, jellemzően jól oldották meg, azonban nem válaszoltak mind az 5 kérdésre, aminek egyik oka az időmenedzsment is lehetett.



8. ábra A természetes számokkal (sorozatokkal) kapcsolatos szöveges feladat eredményének eloszlása
Forrás: saját szerkesztés 2021.

3.2. A szöveges feladatok megoldásainak részletes bemutatása

3.2.1. Közönséges törtekkel kapcsolatos (1.) szöveges feladat

A helyes megoldás egy reprezentációja:

a) Az első napon megtették az út 1 hatodát, közönséges tört alakban felírva: $\frac{1}{6}$. Ennek kétszeresét tették meg a második napon. Az összefüggés művelettel kifejezve: $\frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Katáék tehát az egész út 2 hatod (1 harmad) részét tették meg a második napon.

b) Az első és a második napon megtett távolságok összege: $\frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Az első és a második napon összesen az egész út 1 kettedét, vagyis a felét tették meg.

c) Ha az első és a második napon a teljes út felét, a negyedik napon pedig a teljes út harmadát tették meg, akkor a három napon összesen $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$ részét tették meg. A harmadik napra a teljes út $1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ része jut. Vagyis a megtett 10 km 1 hatod résznek felel meg.

d) Mivel az út 1 hatod része 10 km, ezért a teljes út, ami 6 hatod rész, $6 \cdot 10$ km = 60 km.

e) A második napon a teljes út 2 hatod részét tették meg. Az 1 hatod rész 10 km-t jelent, ezért a 2 hatod rész $2 \cdot 10$ km = 20 km, vagyis 20 km-t tettek meg a második napon.

A feladat megoldása során elkövetett néhány típushiba*:*

1. Az a) kérdés esetén: Az egész út hányadrészét tették meg a második napon? Válasz*: Az egész út 12-edét.* Az egész út tizenkettede akkor lehet válasz a kérdésre, ha a törtek összeadásakor csak a nevezőket adjuk össze. A kapott eredményből következtethetünk arra, hogy a hallgatónak problémát jelent a törtműveletek elvégzése, a számolási eljárás ismerete.

2. A b) kérdés esetén: Az első és a második napon összesen hányad részét tették meg az egész útnak? Válasz: *18-adát.* Ha a 1. hibánál lévő gondolatmenetet követjük, akkor a b) feladatrészre adott válasz esetében adódik az 1 tizennyolcad megoldás, vagyis a törtekkel végzett műveletek okozhatnak problémát a válaszadónak.

Az 1. és 2. típusú rossz válasz együtt jár.

3. A b) kérdés esetén: $\frac{3}{6}$ *mert* $b = a$. A két részfeladatban lévő matematikai probléma nem ugyanaz, ezért a megoldásuk sem adhat ugyanolyan eredményt. Valószínűsíthető, hogy szövegértési probléma merülhetett fel a válaszadás során.

4. A c) kérdés esetén: Az egész út hányadrészét tették meg a harmadik napon? $\frac{1}{3}$ *részét, mert a 4. napon* $\frac{1}{3}$*-ot mentek, és az első két napon együtt szintén ennyit, így a három napot összeadva* $\frac{2}{3}$ *jön ki, szóval* $\frac{1}{3}$ *maradt.* Az első két napon összesen a teljes út 3 hatod részét tették meg. A válaszban történik utalás arra, hogy az első két napon megtett teljes út hossza 1 harmad. Feltételezhető, hogy a 3 hatodot nem jól egyszerűsítette a válaszadó, hiszen az eredménynek 1 kettednek kellett volna lennie. Egy számolási hiba – az egyszerűsítés ismeretének hiánya – okozhatta rossz eredményt.

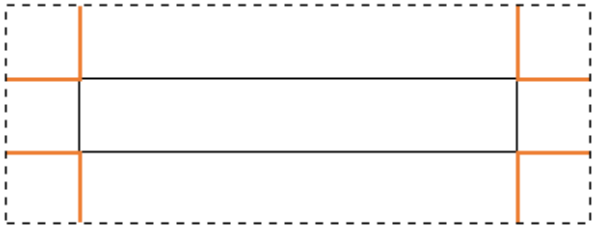
5. A c) kérdés esetén: Az egész út hányadrészét tették meg a harmadik napon? $\frac{2}{6}$ *részét, mert az első, második és negyedik napon megtett részarányt kivontam az 1 egészből.* Ez a megoldás akkor jöhet ki eredményül, ha a teljes útból (6 hatod) kivonjuk a 3 hatodot és az 1 hatodot is. A 3 hatod a b) feladatrészre, az 1 hatod pedig a c) kérdésre adott válasz. Vagyis az első napon megtett részt nem vonta ki a válaszadó. Mivel a kivonások elvégzése nem okozott problémát, ezért szövegértési nehézségei lehettek a hallgatónak.

3.2.2. Geometriai (2.) szöveges feladat

A helyes megoldás egy reprezentációja: A játszóteret 106 négyzettel tudjuk szegélyezni. Ahhoz, hogy a szegély folytonos legyen, a tér négy sarkánál 1-1 olyan járdalapra lesz szükségünk, amelyeknek csak a szomszédos járdalapokkal lesz közös oldala. Azaz a tér kerületét úgy kapjuk meg, hogy a 106 járdalapból elvesszük azt a négyet, amelyeket a sarkoknál helyzetünk el. Egy járdalap egy oldala 1 méter hosszú, akkor a tér kerülete 102 méter, félkerülete 51 méter. Mivel az egyik oldal kétszerese a másiknak, a rövidebb oldal hossza $51:3 = 17$ méter, a hosszabb oldal $17 \cdot 2 = 34$ méter.

A feladat megoldása során elkövetett néhány típushiba*:* 1. *Tudjuk, hogy a szegély területe 106 négyzetméter, mivel az 106 db 1x1 m oldalhosszúságú négyzetből áll, és tudjuk, hogy az ezek által alkotott téglalapnak az egyik oldala 1 m. Ebből következik, hogy a másik oldala a téglalapnak, mely a játszótér egyik oldalának hosszúságával esik egybe, így a játszótér egyik oldala 106 m, míg a másik oldala ennek a kétszerese, ami 212 m, vagy pedig a fele lesz, mely pedig 53 m. Tehát két eset van: (1) A játszótér oldalai (106 m, 212 m); (2) A játszótér oldalai (53 m, 106 m).* A hallgató a feladat megoldásához kiszámolja a járda területét is, holott erre a feladat megoldásához nincsen szükség. Ez egyrészt lehet a szövegértés és a probléma megragadásának nehezítettsége, másrészt lehet annak is a következménye, hogy a hallgatók rutineljárásokat igyekeznek követni a feladatmegoldás során (ezt így szoktuk, ezt mindig ki kell számolni, ha bizonyos adatok ismeretek). Ez utóbbi jelenség elemzése azonban túlmutat e tanulmány témáján. Ugyanakkor ebben a példában a hallgató a gondolatmenetét írja le részletesen, amit az olvasott szöveg alapján jár be. Azt látjuk azonban, hogy a második mondat nem értelmezhető, ami egyértelműen a szövegértés nehézségéből fakad, azaz a hallgató a szövegben szereplő információkat nem tudta feldolgozni.

2. *A játszótér kerülete a járda miatt 106 méter lenne, de még ehhez hozzá kell adni 8 m-t, hiszen a tér sarkain mindig 1-1 négyzet alakú lapot hozzáillesztünk a járdához. Így a tér kerülete 114 m.* Azaz a szöveget a hallgató az alábbi módon értelmezte (9. ábra).



9. ábra Egy hallgatói megoldás reprezentációja
Forrás: saját szerkesztés 2021.

A hallgató jól felismerte a 4 járdalap fontosságát. Ugyanakkor a 8 méter éppen e 4 járdalap többi járdalappal érintkező oldalainak a hosszúsága. Holott e négy járdalap darabszámát kell kivonni a 106 járdalap darabszámából a tér oldalhosszúságainak kiszámításához. A hallgató ellenben mindkét járdalap esetén hozzáadja az érintkező oldalhosszúságokat a kiinduló adathoz. Ugyanakkor a szövegértés és a reális problémafelvetés hiányára utal, hogy a hallgató elfogadja azt a rossz választ, miszerint a tér kerülete a járda miatt lenne 106 méter (ez egy nem értelmezhető megállapítás), ugyanakkor a járda által megszabott kerületnél is nagyobbat ad meg helyes megoldásként.

3.2.3. Logikai (3.) szöveges feladat

A helyes megoldás egy reprezentációja:

a) Anna fekete kártyája lehet 1-es és 2-es, Berci fekete kártyája szintén csak 1-es és 2-es lehet, hiszen a hármas már foglalt, négyest pedig a szabályok szerint nem lehet odatenni. Ezekből adódik, hogy Csaba fekete kártyája kizárólag 4-es lehet, mert az 1-es és 2-es kártyákat muszáj Annánál vagy Bercinél elhelyezni. Mivel a feltételek alapján Anna fehér lapja legalább 3, így Bercinél kell, hogy legyen a fehér 1 és 2 (ebben a sorrendben). Mivel azonban Berci fekete lapja megelőzi a legelső fehéret, első fekete lapja nem lehet más, mint 1. Ekkor Berci első 3 lapjának sorrendje csak fekete1 fehér1 fehér2 lehet. Így Anna első lapja mindenképpen csak a fekete2 lehet.

b) Azaz a lapok sorrendje:

Anna fekete2 fekete3 fehér3; Berci fekete1 fehér1 fehér2 fehér4; Csaba fekete4.

Vagy: Anna fekete2 fekete3 fehér4; Berci fekete1 fehér1 fehér2 fehér3; Csaba fekete4.

A feladat megoldása során elkövetett néhány típushiba:

1. A hallgató a feladat megoldása során Anna kártyái esetében nem vette figyelembe azt a feltételt, hogy „bármelyik két lap közül a jobb oldalin legalább akkora szám volt, mint a másikon”. Idézet egy hallgatói megoldásból: *a.) 2, mert Annának a bal oldali fekete lapját lehet kikövetkeztetni, hogy azon van 4-es, és Csabánál a 2-es. b.) Anna: 4, 3, 3 Berci: 1, 1, 2, 4 Csaba: 2; illetve Anna: 4, 3, 4 Berci: 1, 1, 2, 3 Csaba: 2.*

2. A feladat megoldása során Anna esetében a hallgató figyelembe vette a feladat feltételeit „bármelyik két lap közül a jobb oldalin legalább akkora szám volt, mint a másikon”, Berci esetében azonban nem, ebből adódik a hibás megoldás. Idézet egy hallgatói megoldásból:

a.) 4 db olyan lap van, mert Annánál egyik lapnál se lehet biztosra tudni. Bercinél az utolsó lapnak lehet kettő értéke. Csaba lapja is kettő számú lehet.

*b.) Annánál lehet: *1, *3, 3*	**1, *3, 4*	**2, *3, 3*	**2, *3, 4*
*Csabánál lehet: *2*	**2*	**1*	**1*
*Bercinél lehet: *4, 1, 2, 4*	**4, 1, 2, 3*	**4, 1, 2, 4*	**4, 1, 2, 3*

**=fekete lapok.*

4-féle beosztás lehetséges ebben a játékban.

3. Az alábbi hallgatói válaszok a feladat szövegének teljes mértékű félreértelmezésére utalnak. (1) *A feladatnak nincsen megoldása, mert Csabának csak egy kártyalapja van, így nem lehet a jobb oldalin nagyobb.* (2) a) *1 olyan lap van, amiről biztosan tudom, mivel az az egy van felfordítva. b) Annánál a jobb oldali lap lehet 2, 1, 4 a bal oldali lehet ugyanez csak más sorrendben 1, 2, 4, vagy 2, 4, 1 vagy 1, 4, 2 vagy 4, 2, 1 vagy 4, 1, 2. Bercinél a számok 1, 3, 4, 1 vagy 1, 4, 3, 1 vagy 2, 4, 3, 2 vagy 2, 3, 4, 2.*

4. Azok a hallgatók, akik kombinatorikus „megoldást" adtak, csak arra koncentráltak, hogy kártyákat kell valamilyen sorrendben elhelyezni a megoldáshoz, a többi feltételt figyelmen kívül hagyták. 7 tanuló „oldotta" meg a feladatát az alábbi módok valamelyikén. (1) *a) 2 db olyan lap van, mert a 3-as a jobboldali, tehát az első is 3-as b) Anna: 3, 3, 4!; Berci: 4!, 4!, 3!, 2!; Csaba: 4!* (2) *a.) 1 b) 4x4x4=64; 3x3x3=27; 27+64=91. 91 lehetséges megoldás van.*

3.2.4. Természetes számokkal (sorozatokkal) kapcsolatos (4.) szöveges feladat

A helyes megoldás egy reprezentációja:

a) Mivel a kosár alja 25 cm, és minden sorban 4 centiméterrel szélesedik, így a kosár szélessége a második sorban: $25 + 2 \cdot 4 = 33$ cm.

b) A kosár a hatodik sorban a második sornál $4 \cdot 4 = 16$ cm-rel vagy az aljánál $5 \cdot 4 = 20$ cm-rel szélesebb, azaz 49 cm széles a kosár a 6. sorban.

c) A hetedik sor a harmadik sornál $(7 - 3) \cdot 4 = 16$ cm-rel szélesebb.

d) $(65 - 25): 4 = 40: 4 = 10$ a kosár 10. sora lesz 65 cm széles.

e) $25 + 15 \cdot 4 = 25 + 60 = 85$ cm széles a kosár.

A feladat megoldása során elkövetett néhány típushiba*:*

1. A hallgató a szöveget megértette, a feladatot mint számtani sorozatot azonosította. Azonban a kosár alját első elemnek tekintette, és az $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ összefüggést megszokásból, gondolkodás nélkül használta. A szövegértési probléma helyett itt egy gondolkodási és egy figyelmetlenségi probléma játszik szerepet.

2. A hallgató a szöveget megértette, a feladatot mint számtani sorozatot azonosította. A kosár alját helyesen nulladik elemnek tekintette, de számolási hibát vétett.

3. A hallgató a megoldása során a kosár alját figyelmen kívül hagyta, és így minden válasza 25 cm-rel kisebb volt, mint valójában.

4. A hallgató figyelmetlenül a sorozat differenciáját megváltoztatta, és elvben helyesen dolgozott egy, a feladattól független adattal. A számolás során aritmetikai hibát nem vétett.

5. A hallgató számtani sorozat helyett mértani sorozatként gondolt a feladatra. Azaz soronként nem néggyel növelte, hanem négyszerezte a kosár méretét. E megoldás során a hiba a feladat vizualizálása során történik, azaz a problémahelyzet feltérképezése az olvasott szöveg alapján hibás, a kosár szélesedését a megoldó nem érzékeli, így azt, hogy a kosár a hatodik sorban már 4121 cm széles, elfogadhatónak tartja.

4. Következtetések

Eredményeink arra engednek következtetni, hogy a tanítóképzésbe belépő hallgatók gyengébb matematikai teljesítménye mögött meghúzódó okok között kiemelkedő szerepe van a szövegértés nehezítettségének és a matematikai problémák vizuális reprezentációjának. Az általunk vizsgált szöveges feladatok esetében az is láthatóvá vált, hogy a vizuális reprezentáció nehezítettségét legtöbb esetben szintén a szövegértési és szövegfeldolgozási problémák okozták. Amint arra rámutattunk, a hallgatók a szövegértési és reprezentációs nehézségek áthidalása céljából egyes esetekben rutineljárásokhoz vagy képletek és eljárások értelmezés nélküli alkalmazásához folyamodtak. Ezek az eredményeink egybecsengenek korábbi kutatások megállapításaival (pl. Csíkos–Verschaffel 2011; Nunes–Bryant 2015). Az

általunk vizsgált négy feladat közül, melyek négy témakörben fogalmaznak meg matematikai problémát, különösképpen a logika és a geometria területén volt egyértelműen tetten érhető a szövegértés nehézségeiből és ennek következményeként a nem megfelelő vizuális reprezentációból fakadó sikertelen problémamegoldás.

A kutatás limitációi közé tartozik, hogy csak a hallgatók képzési formájára és nemére vonatkozóan rendelkeztünk háttérváltozókkal. Ugyanakkor az elemzések alapján e limitációk mellett is meg tudtuk fogalmazni a gyakorlat számára azt a következtetést, miszerint a leendő tanítókat abban kell segíteni, hogy a megfelelő szövegértési és reprezentációs készségek kialakítása, illetve megerősítése által a tanításhoz szükséges gondolkodási képességeik és feladatmegoldási stratégiáik jól használható tudássá érjenek.

Összegzés

Tanulmányunkban az ELTE TÓK elsőéves hallgatóinak szövegesfeladat-megoldásait vizsgálva arra kerestük a választ, hogy mennyiben befolyásolják a feladatvégzés sikerességét a szövegértési készségek. A képzésbe belépő hallgatók által írt matematikai szintfelmérő dolgozat négy szöveges feladatának megoldásait vizsgáltuk. Kutatásunkban megállapítottuk, hogy az elsőéves tanítóképzős hallgatók sikerességét a szöveges feladatok megoldásának terén befolyásolja a feladatok szövegének megértése, és az ezen alapuló vizuális vagy mentális reprezentáció. Eredményeink rámutatnak arra is, hogy a hallgatók teljesítménye a képzési formától független. Bár a kutatást csak az ELTE TÓK hallgatóinak bevonásával végeztük, az eredmények a tanítóképzés többi résztvevője számára is relevánsak lehetnek a képzés hangsúlyainak megtalálása során.

Irodalom

Bagota M.–Szitányi J. 2018. Tanító szakos hallgatók matematikai ismereteinek szintfelmérése. *Képzés és Gyakorlat* 16(1): 63–72.

C. Neményi E.–Szendrei J. 2010. *A számolás tanítása. Szöveges feladatok.* Budapest: ELTE Eötvös Kiadó.

Csíkos Cs.–Szitányi J.–Kelemen R. 2012. The Effects of Using Drawings in Developing Young Children's Mathematical Word Problem Solving: A Design Experiment with Thirdgrade Hungarian Students. *Educational Studies in Mathematics* 81(1): 47–65.

Csíkos Cs.–Verschaffel, L. 2011. Mathematical Literacy and the Application of Mathematical Knowledge. In: Csapó B.–Szendrei M. (eds.): *Framework for Diagnostic Assessment of Mathematics.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó, 57–93.

Kelemen R. 2004. Egyes háttérváltozók szerepe „szokatlan" matematikai szöveges feladatok megoldásában. *Iskolakultúra* 11: 28–38.

Kelemen R. 2006. Nemzetközi tendenciák a matematikai szöveges feladatok elméletében. *Iskolakultúra* 1: 56–65.

Kontra J. 2001. A nyelvi és strukturális tényezők befolyása a szöveges feladatok megoldására. *Magyar Pedagógia* 101: 5–45.

Nemzeti alaptanterv (NAT) 2020. *Magyar Közlöny* 17: 290–446.

Nunes, T.–Bryant, P. 2015. The Development of Mathematical Reasoning. In: Lerner, R.M. (ed.): *Handbook of Child Psychology and Developmental Science: Cognitive Processes.* New York: Wiley, 715–762.

Pólya Gy. 2000. *A gondolkodás iskolája.* Budapest: Akkord Kiadó.

Wyndhamn, J.–Säljö, R. 1997. A szöveges feladatok és a matematikai érvelés: mennyire képesek a gyerekek elsajátítani a szövegszerűen megfogalmazott valóság utalásait és jelentését. *Iskolakultúra* 12: 30–46.