Szöveges feladatok megoldása függvénytani ismeretek alkalmazásával

Fülöp Zsolt
Károli Gáspár Református Egyetem, Nagykőrös

Bevezetés

Az aritmetikai módszerekről az algebra eszközeire való áttérés problematikája számos kutatás tárgyát képezi. Az algebrai fogalmak bevezetése több kognitív akadályba ütközik, ezek a nehézségek leginkább a szöveges feladatok algebrai módszerekkel való megközelítése során észlelhetőek. Az aritmetikai gondolatmenetek során a tanulónak elég ismerni a műveletek tulajdonságait, elvégzésének sorrendjét, valamint egy művelet inverzét, így ebben az esetben elegendő egy procedurális (vagy operacionális) gondolkodásmóddal rendelkeznie. Az algebrai ismeretek elsajátítása egy magasabb szintű elvonatkoztatást igényel, ebben az esetben a tanulóknak át kell látniuk a probléma teljes egészét, tehát szükségük van strukturális gondolkodásra. Ezért például az $A \cdot x+B=C$ egyenletekkel modellezhető szöveges feladatok megoldhatók aritmetikai gondolatmenettel, viszont az $A \cdot x+B=C \cdot x+D$ típusú feladatok esetében szükség van a strukturális gondolkodásra. Az algebra oktatásának legfőbb akadálya, hogy a 7. évfolyamos tanulók többségének esetében még nem történt meg az áttérés a strukturális gondolkodásra. Az algebrai módszerek tanításának másik nehézsége, hogy a műveleteket ki kell terjeszteni betűszimbólumokra is, amelyek bizonyos esetekben ismeretlent, máskor pedig változót jelölnek. Körvonalazódik egy olyan elképzelés, hogy a függvénytani ismeretek tanításának már az algebrai gondolkodásmód kialakításának kezdetén jelen kell lennie az oktatásban. A lineáris függvény megismerése maga után vonja a változók fogalmának megértését és elmélyítését, valamint a különböző összefüggések betűszimbólumokkal történő felírását. Ezt követően az $A \cdot x+B=C \cdot x+D$ típusú egyenlettel megoldható szöveges feladatok esetében az x változónak azt az értékét keressük, amelynek esetében két függvény értéke egyenlő, itt az x betűszimbólum viszont már nem változót, hanem ismeretlent jelent. A függvénytani megközelítésre alapozott algebraoktatás fő előnye, hogy a tanulók fokozatosan térnek át a procedurális gondolkodásról a strukturális gondolkodásra. Kutatásaink során 7. évfolyamos tanulók problémamegoldó képességének alakulását vizsgáltuk az előzőekben említett módszereket alkalmazva. A tanulói válaszokat vizsgálva elemeztük a módszer előnyeit és hátrányait az algebrai gondolkodásmód alakulása során.

1. Az aritmetikai módszerekről az algebrai eszközökre való áttérés sajátosságai

Az aritmetikai ismeretek alkalmazásáról az algebra eszköztárára történő átmenet egy komplex folyamat, amely az általános iskola 7-8. évfolyamán valósul meg. Ennek során a tanulóknak szakítani kell az aritmetikai konvenciókkal és áttérni az úgynevezett algebrai gondolkodásmódra. Boulton-Lewis és munkatársai (Boulton-Lewis et al. 1998) egy olyan modellt alkottak, amely az aritmetikáról algebrára való áttérést úgy mutatja be, mint a kognitív képességeknek egy többlépcsős fejlődését. Ez a modell magában foglalja az algebrai fogalmak szekvenciális bevezetésének azokat a vetületeit, amelyeket Biggs és Collis dolgoztak ki (Biggs et al. 1982). Ennek egyik fázisát *Pre-algebrá*nak nevezik, amely valójában az algebra bevezetésének kezdeti fázisát jelenti. Ebben a szakaszban a tanulók már tisztában vannak az ismeretlen és változó különböző jelentésével, ismerik az algebrai kifejezések helyettesítési értékének kiszámítási módját, valamint az egyismeretlenes egyenletek megoldását visszafelé következtetéssel. Továbbá a tanulók képesek megoldani olyan szöveges feladatokat, amelyek algebrai modellje egy $A \cdot x + B = C$ típusú egyenlet, vagyis ahol az ismeretlent kifejező x betűszimbólum az egyenlőségjelnek csak egyik oldalán található meg. Mivel az ilyen típusú szöveges feladatok megoldhatók tipikusan aritmetikai módszerekkel is, ezért ezeket *aritmetikai feladatoknak* is nevezzük. A *Pre-algebra* szakaszából történik az átmenet az *Algebra* fázisába. Itt a tanulók megismerik az algebrai egyenletek megoldási módszereit (beleértve elsősorban a mérleg-elvet), valamint meg kell érteniük, hogy az egyenlőségjel egy ekvivalenciát jelent. Szükséges elmélyíteni az egyenlőségjelnek egy olyan értelmezését, amely szerint az egyenlet két oldalán egyenértékű (ekvivalens) kifejezések állnak. Ez lehetőséget teremt olyan szöveges feladatok megoldására, amelynek algebrai modellje egy $A \cdot x + B = C \cdot x + D$ típusú egyenlet.

Az algebrai gondolkodás megalapozásának egyik alapvető feltétele, hogy a tanulók szakítsanak az aritmetikai konvenciókkal, és egy olyan szemléletmóddal rendelkezzenek, amelynek alapján az adott matematikai probléma (például egy szöveges feladat) teljes szerkezetét átlátják. Sfard az algebrát általánosított aritmetikának tekinti, és kiemeli, hogy ez egy *procedurális,* illetve egy *strukturális* fázisból áll (Sfard 1997). Ennek alapján a tanulók kognitív fejlődésében megkülönböztethetjük a *procedurális* (vagy *operacionális*)*,* illetve a *strukturális* gondolkodást. A *procedurális* gondolkodás még az aritmetikai megoldások különböző jegyeit hordozza magában, míg a *strukturális* gondolkodás már az algebrai absztrakció vetületeit tartalmazza. Tehát az algebraoktatás tanítása során nélkülözhetetlen az áttérés a procedurális gondolkodásról a strukturális gondolkodásra. Ezt az átmenetet Filloy és Rojano *didactic cut*-nak (Filloy–Rojano 1989), míg Herscovics és Linchevski *cognitiv gap*-nek nevezik (Herscovics–Linchevski 1994). Stacey és MacGregor a „formális algebra" egy indikátorának tekintik azt, hogy a tanulók képesek helyesen felírni és megoldani az $A \cdot x + B = C \cdot x + D$ típusú egyenleteket (Stacey–MacGregor 2000).

Az algebra általános iskolai tanítása során számos akadály merül fel, ezek főként az egyenlőségjel, a betűszimbólumok és a műveleti tulajdonságok helytelen értelmezéséből és az ismeretlenek közötti összefüggések algebrai eszközökkel történő felírásából adódnak. Az algebrai oktatás során a tanulóknak szükséges megérteni, hogy az egyenlőségjel ekvivalens kifejezéseket választ el, és a műveletek mindkét irányban elvégezhetők (Linchevski 1995). Ennek ellenére a tanulók úgy értelmezik, hogy az egyenlőségjel jobb oldalán mindig a bal oldalon szereplő műveletek eredménye áll (Stacey–MacGregor 1997). Egy másik hiba, hogy az egyenlőségjelnek egyszerűen szintaktikai jelentőséget tulajdonítanak, vagyis egy olyan írásjelnek tekintik, amely mögött egy matematikai problémában megfogalmazott kérdésre adott válasz szerepel (Filloy–Rojano 1989). Egy általam végzett mérés során is hasonlókat tapasztaltam a következő matematikai probléma esetében (Fülöp 2017).

Feladat: *Egy farmon libák, kacsák és pulykák vannak. A szárnyasok egy negyede pulyka és egy harmada liba. A kacsák száma 65. Mennyi szárnyas van a farmon?*

A fenti feladatra néhány tanuló a következő tipikusan hibás „egyenleteket" írta fel:

$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 65$ $\quad$ $\frac{x}{4} + \frac{x}{3} + 65 = ?$ $\quad$ $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + 65 = ?$

A válaszokból kiderül, hogy a tanulók az egyenlőségjelet a műveletek egyfajta „lezárásának" tekintették, ezt a nemzetközi irodalom *closure* néven említi. Ezért helyezték a feladatban szereplő számadatot az egyenlőségjel jobb oldalára. Továbbá idegenkedtek attól, hogy a jobb oldalra az x betűszimbólumot helyezzék, ezért az ismeretlen mennyiséget kérdőjellel helyettesítették. A harmadik válasz egy tipikusan aritmetikai gondolkodásmódot jelez, ahol még az x betűszimbólum sem szerepel. A válaszokból az is kiderül, hogy az említett tanulók még nem rendelkeznek az egyenlet felírásához szükséges strukturális gondolkodással.

A strukturális gondolkodás hiányának tulajdonítható a nemzetközi irodalomban *reversal error* néven említett hibaforrás. A tanulók gyakran hajlamosak arra, hogy például az „öttel több diák van, mint tanár", illetve „ötször annyi diák van, mint tanár" összefüggéseket betűszimbólumokkal $D + 5 = T$, illetve $5 \cdot D = T$ alakban írják fel. Ennek hátterében a köznyelvi megfogalmazások helytelen értelmezése (Kaput 1987), illetve az adott szövegnek egy közvetlen szintaktikai megközelítése áll (Mestre 1988).

Az aritmetikáról algebrára történő áttérés során nagy nehézséget jelent a betűszimbólumokkal történő manipuláció. Küchemann a tanulói gondolkodást a betűszimbólumok értelmezése terén két nagy csoportba sorolta:

- A betűszimbólum mellőzése vagy számokkal való helyettesítése, illetve a betűszimbólumoknak a tárgyak nevének rövidítéséhez való használata.
- A betűszimbólum egy ismeretlent vagy egy általánosított számot (változót) jelent.

A továbbiakban arra a következtetésre jutott, hogy a 13-15 éves tanulók még nem képesek arra, hogy a betűszimbólumokat úgy kezeljék mint ismeretleneket vagy változókat (Küchemann 1981).

Sokáig elfogadott tény volt, hogy az algebrai jelölések különböző interpretációja kizárólag az eltérő kognitív képességeknek tulajdonítható. Például, ha egy tanuló ismeretanyagában bizonyos fogalmak nem rögzültek, akkor képtelen lesz egyes algebrai feladatokat helyesen megoldani. Ezekkel az elméletekkel ellentétben Stacey és MacGregor kiemelték, hogy az algebrai fogalmak félreértelmezésében a kognitív képességeknél jóval kézzelfoghatóbb tényezők is közrejátszanak, mint például:

- intuitív feltételezések és pragmatikus gondolkodás egy szokatlan jelölési rendszerrel kapcsolatban;
- analógiák egyéb olyan szimbólumrendszerekkel, amelyek a mindennapi életből, a matematika más területeiről vagy más tantárgyak jelölésrendszeréből származnak;
- az újonnan szerzett matematikai ismeretek interferenciája;
- rosszul felépített, félrevezető oktatási anyagok.

Az említett szerzők megállapították, hogy a tanulók többsége nem képes olyan feladatokat megoldani, ahol a betűszimbólumokat mint számokat kell értelmezni. Ezért azt javasolják, hogy az algebra tanítását kezdetben a betűszimbólumokon végzett konkrét műveletek szintjén kell kezelni (Stacey–MacGregor 1997).

2. A függvénytani alapokra helyezett algebraoktatás

Több kutatás rávilágít arra, hogy az algebra bevezetését függvénytani alapokra kell helyezni. Yerushalmy támogatja azt a véleményt, hogy a függvény fogalmának már az algebratanítás kezdeteitől jelen kell lennie az iskolai tananyagban (Yerushalmy 2000). A számítógéppel támogatott oktatás lehetővé teszi a függvények értéktáblázatának és grafikonjának az elkészítését, ezért több kutató is javasolja az algebra tanításának függvénytani alapokra helyezését (Kieran 1997; Leitzel 1989). Ebben a megközelítésben az olyan fogalmak, mint változók, ismeretlenek, egyenletek stb. új értelmet nyernek (Kieran et al. 1996). Így az új technológiáknak köszönhetően az egyenletek megoldásának tanítása már a kezdetektől két külön irányban valósulhat meg: függvénytani megközelítésben (a függvények grafikonjának elemzésével) és hagyományos egyenletmegoldó módszerekkel (lebontogatással, illetve mérlegelvvel).

Kutatók egy csoportja (Farmaki et al. 2004) megvizsgálta a 13 éves tanulók problémamegoldó képességeit mindkét megközelítésben olyan szöveges feladatok esetében, amelyek algebrai modellje az $A \cdot x + B = C \cdot x + D$ egyenlet. Azt a következtetést vonták le, hogy a függvénytani megközelítés jobban segíti a tanulók algebrai gondolkodásának kialakulását, mint a szöveges feladatok egyenletekkel történő megoldása. Ez elsősorban annak köszönhető, hogy a függvények elemzésénél jóval több lehetőség kínálkozik a szemléltetésre, például értéktáblázat, illetve grafikon elemzése vagy a függvény hozzárendelési utasításának vizsgálata. Ez a megközelítés sokkal gyakorlatiasabbá teszi a szöveges feladatok megközelítését. Lehetővé teszi továbbá, hogy a tanulók a betűszimbólumokra ne csak úgy tekintsenek mint ismeretlenekre, hanem mint egy olyan változóra, amelynek helyes megválasztása szolgáltatja a feladat megoldását. Ilyen módon az algebrai fogalmak tartalommal telnek meg, elősegítve ezeknek a könnyebb megértését.

A függvénytani megközelítés előfutárának tekinthető a hamis feltételezések módszere. 2015 óta foglalkozom azzal, hogy a hamis feltételezések módszerét (mint egy tipikusan aritmetikai eszközt) ismertessem az általános iskolai tanulókkal történő foglalkozások során, továbbá közzétettem ide vonatkozó megfigyeléseimet és tapasztalataimat (Fülöp 2016; Fülöp 2020). A hamis feltételezések módszerének lényege, hogy a feladat ismeretlen mennyiségeire nézve valamilyen feltételt (feltételeket) állítunk, és összehasonlítjuk a valódi helyzetet (a feladat adatait) a hipotézisek által létrehozott helyzettel. Az eltérés figyelembevételével egyszerű számolások segítségével könnyen következtethetünk arra, hogy mennyiben tér el a hamis feltételezés a helyes megoldástól. Ennek a módszernek az alkalmazása a 6. osztályos matematikaoktatásban konkrét számokkal történő manipulációkon alapul, amelyet a későbbiekben a függvénytani megközelítés során a változók értékeivel történő számolások követnek. Mindkét módszer esetében a konkrét számokból kiindulva haladunk az absztrahálás irányába, és ezzel párhuzamosan erősítjük a procedurális gondolkodást, és alapozzuk meg a strukturális gondolkodásra való áttérést. A fentiek szemléltetésére tekintsük a következő feladatot.

Feladat: *Két könyvespolcon könyvek vannak, a másodikon háromszor annyi, mint az elsőn. Ha a másodikról elveszünk 13 könyvet, az elsőre pedig felteszünk még 10 könyvet, akkor a másodikon kétszer annyi könyv lesz, mint az elsőn. Hány könyv van a két könyvespolcon külön-külön?*

A feladat megoldása a hamis feltételezések módszerével a következőképpen történik, az alábbi táblázat egy tanuló megoldását szemlélteti.

	első polc	második polc	első +10	második - 13	hiba
Első feltételezés	10	30	20	17	23
Második feltételezés	11	33	21	20	22
Megoldás	33	99	43	86	0

1. táblázat: Megoldás a hamis feltételezések módszerével
Forrás: saját szerkesztés

Megfigyelhető, hogy az említett tanuló az első polc tartalmából kiindulva konkrét számokkal történő manipulációval következtetett a hiba alakulására vonatkozóan. Nevezetesen arra, hogy az első polc tartalmát eggyel növelve a feltételezés hibája (a végső helyzetben az első polc tartalmának kétszerese és a második polc tartalma közötti különbség) eggyel csökken.

A fenti táblázatot függvénytani megközelítésben is lehet szemlélni, ahol az x változó az első polc kezdeti tartalmát jelenti.

	x	$3 \cdot x$	$x + 10$	$2 \cdot (x + 10)$	$3x - 13$	hiba
Első felt.	10	30	20	40	17	23
Második felt.	11	33	21	42	20	22
Megoldás	33	99	43	86	86	0

2. táblázat: Az adatok felírása algebrai kifejezésekkel
Forrás: saját szerkesztés

A fentiekből kitűnik, hogy a függvénytani megközelítés lényege az, hogy megtaláljuk az x változónak azt az értékét, amelyre a táblázat ötödik és hatodik oszlopában szereplő algebrai kifejezések értéke egyenlő. Konkrétan célunk megtalálni az x változónak azt az értékét, amely a $2 \cdot (x + 10) = 3x - 3$ egyenletnek a megoldása. Ez a gondolatmenet magában foglalja azokat a mozzanatokat, amelyeket röviden a *konkrét számadat – változó – ismeretlen* átmenet jelent.

3. A felmérés lebonyolítása

A magyarországi tantervekben, számos európai országhoz hasonlóan az algebrai ismeretek és az egyenletek megoldásának tanítása megelőzi a függvények témakörét. Kezdetben a tanulók az algebrai kifejezéssel ismerkednek meg, ahol az egyszerű betűs kifejezések összeadása, kivonása, a helyettesítési érték számolása, az egytagú kifejezések számmal való szorzása, a kéttagú betűs kifejezés számmal való szorzása, valamint a két tagból közös számtényező kiemelése szerepel kiemelt jelentőséggel. Ezt követi ez egyenletek megoldása lebontogatással, illetve mérlegelvvel. A következőkben a tanulók algebrai eszközökkel oldanak meg szöveges feladatokat. Az oktatási folyamat során lehetőség nyílik az algebrai kifejezésekkel végzett műveletek, valamint az egyenletmegoldási módszerek elsajátítására. Ugyanakkor nem nyílik lehetőség arra, hogy kialakuljon a megfelelő strukturális gondolkodás, amely az $A \cdot x + B = C \cdot x + D$ alakú egyenletekkel felírható szöveges feladatok megoldásának előfeltétele. Így a tanulók csak a tipikusan aritmetikai feladatokhoz képesek felírni egyenletet, viszont ezt sikeresen végrehajtják. Ezért úgy a pedagógusban, mint a tanulóban kialakul egy olyan téves elképzelés, hogy a tanulók bármely szöveges feladathoz képesek helyesen felírni az egyenletet, és az esetleges hibák pusztán az eltérő kognitív képességeknek tulajdoníthatók. A függvénytani ismeretek jóval később, egy másik fejezetben kerülnek bemutatásra, a tanított tananyag pedig nincs összhangban az algebrai kifejezések tanítása során elvárt tanulási eredményekkel.

Jelen kutatásunkat arra összpontosítottuk, hogy milyen mértékben fejlődik a tanulók strukturális gondolkodása abban az esetben, ha a függvények ismertetését a szöveges feladatok alfejezet megoldása előtt végezzük el, és az algebra függvénytani alapokon való megközelítését az ismertetett koncepció alapján valósítjuk meg. A kutatásban a Gödöllői Református Líceum 23 tanulója vett részt. Kezdetben a tanulók megismerték az algebrai kifejezéseket és az egyenletek megoldását. Ezt követte a lineáris függvények bemutatása konkrét gyakorlati problémákon keresztül. A tevékenységek során a szöveges feladatokban szereplő ismeretlen mennyiségeket egy-egy függvény hozzárendelési utasításának megfelelően írtuk fel, majd ezt követően a tanulókra hárult az a feladat, hogy megtalálják a változónak azt az értékét, amelyre a feladatban rögzített feltételek teljesülnek. Ezt egyes feladatok esetében viszonylag könnyen megtalálták a függvények értéktáblázatának elkészítése során. Ugyanakkor olyan feladatokat is kaptak, ahol a feladat feltételei csak a változó viszonylag nagy értéke esetén teljesültek. Ebben az esetben az értéktáblázat elkészítése nem vezetett eredményre, így a feladat megoldásához egyenletet kellett felírni. Ezt úgy érték el, hogy a feladatban előzőleg tanulmányozott függvények hozzárendelési utasításait egyenlővé tették, így az egyenlet jobb, illetve bal oldalán egy-egy függvény hozzárendelési utasítása szerepelt. Ilyen jellegű megoldási stratégiákkal az érvényes tantervekben csak a függvények fejezet végén és csak bizonyos feladattípusok (mozgásokkal és hűtéssel-melegítéssel kapcsolatos problémák) esetében találkozunk. Ebben az esetben viszont az egyenletek fejezetnél szereplő problématípusok jelentős részét ezzel a stratégiával közelítettük meg. A 6 tanórát felölelő tevékenységsorozatot egy írásbeli felmérés követte, amelynek során a tanulók 45 perc alatt egy olyan feladatlapot oldottak meg, amelyen négy feladat szerepelt. A tanulók által elért eredményeket és az ezekkel kapcsolatos megfigyeléseinket a következőkben mutatjuk be.

4. A feladatok megoldásának értékelése

Feladat: *Egy farmon a tehenek száma a lovak számának a háromszorosával egyenlő, a birkák száma pedig 36-tal több, mint a lovak számának a kétszerese. Készítsünk táblázatot a feladatban szereplő állatok lehetséges számáról! Írjuk fel ezeket x függvényében, ahol x a lovak számát jelenti! Hány ló, tehén és birka van a farmon, ha tudjuk, hogy a birkák száma kétszerese a tehenek számának? Írjunk fel egyenletet a feladathoz és oldjuk meg!*

A könnyebb követhetőség kedvéért a tanulók eredményességét táblázatba foglaltuk.

Jó válasz	Elvi hiba	Számolási hiba
11	9	3

3. táblázat: A feladatra adott válaszok megoszlása
Forrás: saját szerkesztés

Az értékelésnél elvi hibának minősült, ha a tanuló helytelenül írta fel a függvény hozzárendelési utasítását vagy rosszul írta fel az egyenletet (annak ellenére, hogy esetleg a függvény hozzárendelési utasítását helyesen írta fel). Egy tanuló a $3x = 2x + 36$ egyenletet írta fel, vagyis egyszerűen egyenlővé tette a függvények hozzárendelési utasításában található algebrai kifejezéseket. Két tanulónál előfordult a *reversal error* néven említett típushiba, ők a $2 \cdot (2x + 36) = 3x$, illetve a $2 \cdot (x + 36) = 3x$ egyenleteket írták fel. Az utóbbi esetében helytelenül szerepel az egyik függvény hozzárendelési utasítása is. Egy tanuló az elvileg helyes, de nehezen értelmezhető $x + 3x + 2x + 36 = x + 3x + 2 \cdot 3x$ egyenletet írta fel. 3 tanuló helyesen írta fel a függvények hozzárendelési utasítását, viszont nem volt képes semmilyen egyenletet felírni. Egy tanuló a függvények hozzárendelési utasítását helytelenül írta fel, és csak egy olyan tanuló volt, aki a függvényekhez semmilyen hozzárendelési utasítást nem írt fel (annak ellenére, hogy helyesen kitöltött egy értéktáblázatot), tehát nem volt képes algebrai szimbólumokkal felírni az adatok közötti összefüggéseket.

Feladat: *Bélának kezdetben volt 150 euró zsebpénze, amelyből naponta elkölt 2 eurót. Andrásnak kezdetben nem volt zsebpénze, viszont diákmunkával minden nap szerez 3 eurót. Készítsünk táblázatot a fiúk zsebpénzének alakulásáról! Írjuk fel x függvényében a fiúk zsebpénzét, ahol x az eltelt napok számát jelenti! Hányadik napon lesz a két fiúnak ugyanannyi pénze? Írjunk fel egyenletet a feladathoz és oldjuk meg!*

Jó válasz	Elvi hiba	Számolási hiba
12	8	3

4. táblázat: A feladatra adott válaszok megoszlása
Forrás: saját szerkesztés

6 tanuló helytelenül írta fel a függvények hozzárendelési utasítását, közülük 3 tanuló (a rosszul felírt hozzárendelési utasításból kiindulva) helyesen írta fel az egyenletet, ketten az egyenlet felírásánál is hibáztak, az egyik pedig nem volt képes egyenletet felírni. 2 tanuló csak az értéktáblázatot tudta helyesen elkészíteni, a függvények hozzárendelési utasításának és az egyenletnek a felírását kihagyta.

Feladat: *András és Béla matricákat gyűjtenek. Kezdetben Andrásnak 12, Bélának 56 matricája volt. Azután naponta András 2 matricát, Béla pedig 3 matricát szerez. Készítsünk táblázatot a két fiú által gyűjtött matricák számának naponkénti alakulásáról! Írjuk fel x függvényében mindkettőjük matricáinak a számát, ahol x az eltelt napok számát jelenti! Hányadik napon lesz Bélának kétszer annyi matricája, mint Andrásnak? Írjunk fel egyenletet a feladathoz és oldjuk meg!*

Jó válasz	Elvi hiba	Számolási hiba
16	6	1

5. táblázat: A feladatra adott válaszok megoszlása
Forrás: saját szerkesztés

Egy tanulónál fordult elő a reversal error, ő a $2 \cdot (3x + 56) = 2x + 12$ egyenletet írta. Egy tanuló a $2x + 10 = 3x + 56$ egyenletet írta, ő az egyik függvény hozzárendelési utasítását rontotta el, valamint helytelenül értelmezte az adatok közötti összefüggést a végső helyzetben. Egy másik tanuló a zárójelezést mulasztotta el, így a $12 + 2x \cdot 2 = 56 + 3x$ egyenletet írta. 3 tanuló egyáltalán nem írt fel egyenletet (mindhárman helyesen készítették el az értéktáblázatot), közülük kettő a függvények hozzárendelési utasítását sem írta fel, a harmadik helytelenül tette.

Feladat: *Egy baromfiudvarban a tyúkok száma a kacsák számának a háromszorosával egyenlő. A baromfiudvarba hoztak még 12 tyúkot és 23 kacsát. Készítsünk táblázatot a tyúkok, illetve kacsák lehetséges számáról a végső helyzetben. Írjuk fel x függvényében ezeket a mennyiségeket, ahol x a kacsák kezdeti számát jelenti. Tudjuk, hogy a végső helyzetben a tyúkok száma a kacsák számának a kétszeresével egyenlő. Hány tyúk és hány kacsa volt kezdetben a baromfiudvarban? Írjunk fel egyenletet a feladathoz és oldjuk meg!*

Jó válasz	Elvi hiba	Számolási hiba
13	8	2

6. táblázat: A feladatra adott válaszok megoszlása
Forrás: saját szerkesztés

A *reversal error* egy tanulónál fordult elő, ő a $2 \cdot (3x + 12) = x + 23$ egyenletet írta. Egy tanuló a zárójelezést mulasztotta el és így a $3 \cdot x + 12 = 2 \cdot x + 23$ egyenletet írta. 2 tanuló helyesen készítette el az értéktáblázatot és írta fel a függvények hozzárendelési utasítását, viszont nem írták fel az egyenletet. Egy tanuló az értéktáblázat helyes elkészítése után rosszul írta fel a függvények hozzárendelési utasítását. 3 tanuló helytelenül értelmezte az adatok közötti összefüggéseket, így az értéktáblázatot is hibásan készítette el.

Összegzés

A mérést egy viszonylag kis mintán végeztük, ezért nem fogalmazhatunk meg általános érvényű következtetéseket, viszont tehetünk olyan megállapításokat, amelyek a további kutatásokra nézve irányadóak lehetnek. A feladatlapokon szereplő válaszok elemzése során megállapítható, hogy az esetek közel 60%-ában a tanulók helyes megoldást adtak. Ez bizalomkeltő, mivel az ilyen, viszonylag összetett feladatok esetében a tanulók általában nehezen írnak fel és oldanak meg egyenleteket. A függvénytani megközelítés elősegíti a tanulók strukturális gondolkodásának fejlődését. Az értéktáblázatok elkészítése során a konkrét számadatokkal történő manipulálás során a tanulók jobban átlátják a feladat teljes szerkezetét, így a következő lépésben viszonylag könnyen írják fel a függvények hozzárendelési utasítását. Ennek következményeként könnyebben írják fel a feladatok algebrai modelljét képező $A \cdot x + B = C \cdot x + D$ egyenletet. Ebben nagy segítséget jelent az egyenlőségjellel jelzett ekvivalencia olyanszerű megközelítése, hogy az egyenlet jobb, illetve bal oldalán egyenértékű kifejezések, konkrétan a függvények hozzárendelési utasításai, állnak. Az elért eredmények alapján arra a következtetésre jutottunk, hogy az algebraoktatás függvénytani alapokon történő megközelítésére irányuló kísérleteket nemcsak folytatni lehet, hanem folytatni kell. A függvények és algebrai kifejezések közötti összefüggések érdekében a tantervekben is szükséges az említett témakörök szorosabb összekapcsolása.

Irodalom

Biggs, J. B.–Collis, K. F. 1982. *Evaluating the quality of learning. The SOLO taxonomy*. New York: Academic Press.

Boulton-Lewis, G.–Pillay, H.–Wilss, L. 1998. Sequential development of algebra knowledge: a cognitive analysis. *Mathematics Education Research Journal* 10(2): 87–102.

Farmaki, V.–Klaoudatos, N.–Verikios, P. 2004. From functions to equations: introduction of algebraic thinking to 13 year-old students. *International Group for the Psychology of Mathematics Education* 28: 393–400.

Filloy, E.–Ceballos, T. 1989. Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics* 9(2): 19–25.

Fülöp Zs. 2017. *Feladat megoldási módszerek összehasonlító vizsgálata a pedagógus, illetve a diák rendelkezésére álló ismeretek birtokában.* Doktori értekezés. Szegedi Tudományegyetem. Bolyai Intézet.

Fülöp Zs. 2016. Regula falsi in lower secondary school education. *Teaching Mathematics and Computer Science* 14/2: 169–194.

Fülöp Zs. 2020. Regula falsi in lower secondary school education II. *Teaching Mathematics and Computer Science* 18(2): 121–142.

Herscovics, N.–Linchevski, L. 1994. A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics* 27: 59–78.

Kaput, J. 1987. Toward a theory of symbol use in Mathematics. In: Janvier, C. (ed.): *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 159–195.

Kieran, C.–Boileau, A.–Garancon, M. 1996. Introducing algebra by means of a Technology-supported functional approach. In: Bednarz, N. (ed.): *Approaches to Algebra*. Dordrecht: Kluwer.

Kieran, C. 1997. Mathematical concepts at the secondary school level: The learning of algebra and functions. In: Bryant, P–Nunes, T. (ed.): *Learning and teaching mathematics: An International Perspective*. Psychology Press, 133–158.

Küchemann, D. 1981. Algebra. In: Hart, K. M (ed.): *Children's Understanding of Mathematics*. 11–16. 103–119.

Leitzel, J. R. 2018. Critical considerations for the future of algebra instruction. In: *Research issues in the learning and teaching of algebra,* 25–32.

Linchevski, L. 1995. Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *Journal of Mathematical Behavior* 14(1): 113–120.

Mestre, J. 1988. The role of language comprehension in mathematics and problem solving. In: Cocking, R. R.–Mestre, J. P. (ed.): *Linguistic and Cultural Influences on Learning Mathematics.* 201–220.

Sfard, A. 1991. On the dual nature of mathematics conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22(1): 1–36.

Stacey, K.–MacGregor M. 1997. Ideas about symbolism that students bring to algebra. *The Mathematics Teacher* 90(2): 110–113.

Stacey, K. – MacGregor M. 1999. Learning the algebraic methods of solving problems. *The Journal of Mathematical Behavior* 18(2): 149–167.

Yerushalmy, M. 2000. Problem solving strategies and mathematical resources: A longitudinal view on problem solving in a function based approach to algebra. *Educational Studies in Mathematics* 43: 125–147.